

Samtidig visning av alla storheter på 3-fas elnät



Med **nätanalyserna från Qualistar+ serien** visas samtliga parametrar på tre-fas elnätet på en färgskärm.

Qualistar+ visar signalerna från alla ingångar samtidigt. Alla mätningar visas som exempelvis vågformer, övertonsvisning eller som Fresnel-diagram.

**Tidsbaserad
visning**

**Övertons
visning**

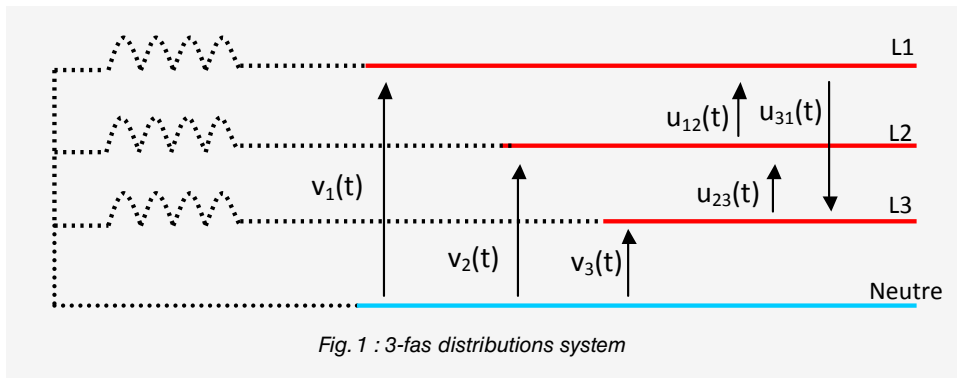
**Vektorial
visning**

Samtidig visning av alla elektriska storheter på 3-faser

1. 3-fas spänningar

Elektriskenergi sänds från produktionsplatsen (källan) till förbrukningsplatsen (lasten) via tre ledare. I Sverige är de flesta installationer i huvudsak 3-fas installationer med växelström. En 3-fas krets mottager tre sinus spänningar med samma frekvens.

Ett 3-fas distributions system (fig. 1) består av 3 ledare samt även en noll-ledare:



A. Beräkningar

3-fas system består av $v_1(t)$, $v_2(t)$ och $v_3(t)$ och uttrycks med följande formel :

$$\begin{aligned}v_1(t) &= V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t) \\v_2(t) &= V_2 \sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\v_3(t) &= V_3 \sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3})\end{aligned}$$

I teorin :

- är amplituden för de 3 spänningarna lika stora,
- fasvinkeln är (120°) mellan varje fas,
- spänningen är en perfekt sinusvåg.

I praktiken, är dessa teorier inte sanna. För att se hur stort felet är samt kvantifiera det måste mätning av **obalans samt THD, total övertonshalt** mätas.

Spänningarna $v_1(t)$, $v_2(t)$ och $v_3(t)$ är kallade « fas-till-fas » eller « fas-till-noll spänning ». Spänningarna som mäts mellan faserna är kallad fas-till-fas spänning. När 3-fas system med fas-till-noll spänningar är perfekta, är ekvationerna av dessa fas-till-fas spänningar uttryckta som :

$$\begin{aligned}u_{12}(t) &= v_1(t) - v_2(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) \\u_{23}(t) &= v_2(t) - v_3(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\u_{31}(t) &= v_3(t) - v_1(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{5\pi}{6})\end{aligned}$$

Amplituden (samt RMS-värdet) på fas-till-fas spänningarna är $\sqrt{3}$ större än de som är fas-till-noll spänningar. Summan av de 3 komponenterna i ett 3-fas system är lika med 0.

Samtidig visning av alla elektriska storheter på 3-faser

B. Tidsbaserad visning

Ett 3-fas system med fas-till-noll spänning (fig. 2) består av 3 sinussignaler som följer varandra med en förskjutning om 6,6 ms.

Vilket är,

$$\omega \cdot t_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$t_0 = \frac{2\pi}{3 \cdot \omega} = \frac{2\pi}{3 \cdot 314} = 6,67 \text{ ms}$$

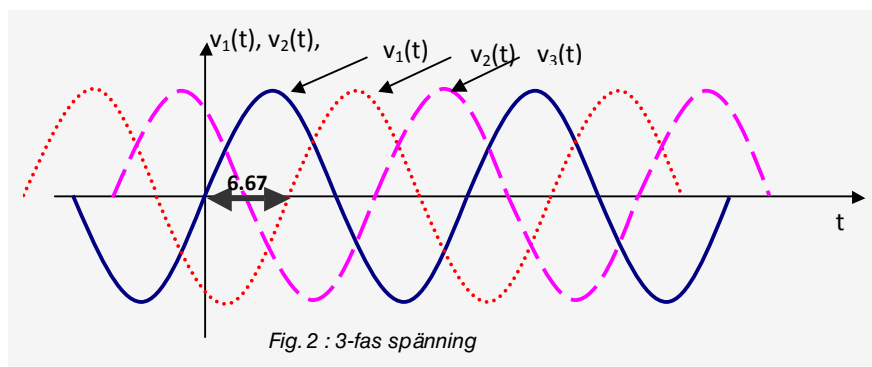


Fig. 2 : 3-fas spänning

C. Vektordiagram

3-fas systemet fas-till-noll i exemplet här ovanför kan visas som en vektor (fig. 3). Längden på vektorerna beror på amplituden på sinussignalen som är systemet. Vanligtvis är vi i den verkliga världen intresserade av RMS-värden, så vektordiagrammet är för det mesta baserat på RMS-värdena på sinussignalen.

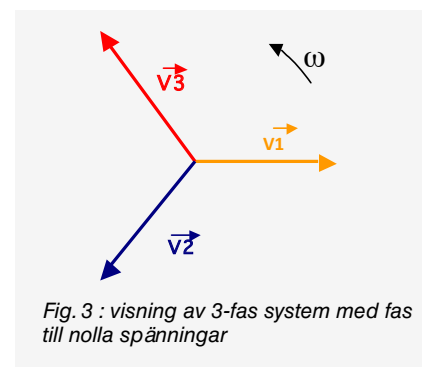


Fig. 3 : visning av 3-fas system med fas till nolla spänningar

2. Tidsbaserad visning av signaler

De elektriska signalerna visas som ett oscilloskopsfönster. Signalen varierar beroende på den analoga elektriska storheten (spänning eller ström) som en funktion av tiden. Dessa funktioner varierar kontinuerligt över tiden baserade på en matematisk lag.

En spänning eller strömsignal (fig. 4) som visas som en funktion av tiden kan uttryckas med denna matematiska relation:

$$t \rightarrow x(t)$$

där $x(t)$ visar signalens värde varje gång den passerar tiden t . Detta är vanligtvis kallat **kontinuerligt värde**.

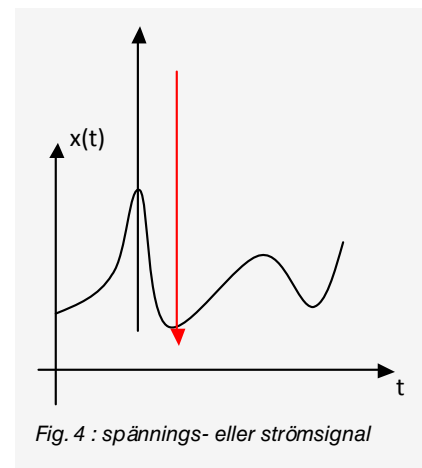


Fig. 4 : spännings- eller strömsignal

Speciella fall

Periodisk signal

En signal $x(t)$ är **periodisk** när följande relation är sann :

$$x(t + T) = x(t)$$

Signalen repeteras identiskt över tiden. Tidsintervallen mellan de två momenten visas med exakt samma karaktärestik kallas **T-period**

(fig. 5).

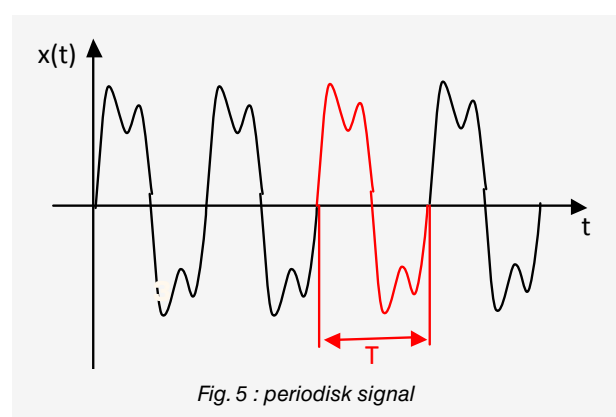


Fig. 5 : periodisk signal

Samtidig visning av alla elektriska storheter på 3-faser

FOURIER FFT-analys

När signalen är periodisk men inte en sinus, samt beräknad enligt vissa matematiska formler (vilket vanligtvis är fallet i verkligheten) kan en **FOURIER FFT-analys** beräkning användas. Det för att få en tidsbaserad visning med enbart DC-signalen samt även med sinus signalen vilka dessa är multiplar av grundtonens frekvens.

Detta är särskilt intressant vid beräkningar samt vid FFT-analys (**spektral visning**).

Detta kan även uttryckas i denna matematiska formel :

Om $x(t)$, är en periodisk signal med perioden T , består $x(t)$ av en FOURIER FFT-analys enligt formeln nedan:

$$x(t) = \begin{cases} X_0 + \\ A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_n \cos n\omega t + \\ B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_n \sin n\omega t \end{cases}$$

med :

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega \cdot t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega \cdot t) dt$$

X_0 är kallad DC-komponenten på signalen $x(t)$;

A_n och B_n är koefficienter vilka representerar amplituden av varje enskild överton på signalen $x(t)$.

Exempel

Likspänning

$$u(t) = E$$

Spänningen $u(t)$ (fig. 6) varierar inte över tiden.

Den är inte periodisk, så den kan inte visas med en FOURIER analys .

Växelström (fig. 7)

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

Denna signal är periodisk med perioden T därför att :

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

$$i(t+T) = I_{\max} \sin[\omega(t+T)] = I_{\max} \sin(\omega t + 2\pi) = I_{\max} \sin \omega t$$

$i(t+T) = i(t)$ denna signal är därför periodisk med period T .

Det är inte nödvändigt att beräkna FOURIER för signalen eftersom $i(t)$ är en ren sinuskurvform.

Strömpulssignal (fig. 8)

$$i(t) = I \text{ under en halv-period}$$

$$i(t) = -I \text{ under en halv-period}$$

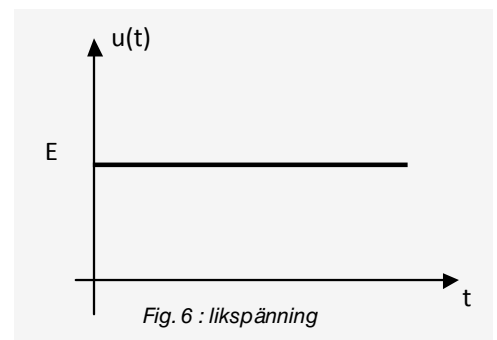


Fig. 6 : likspänning

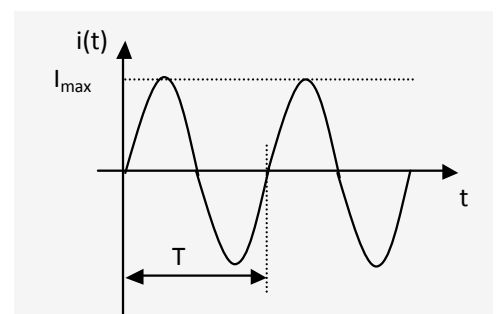


Fig. 7 : växelström sinusformad

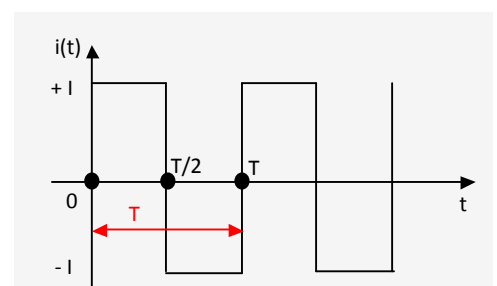


Fig. 8 : strömpuls

Samtidig visning av alla elektriska storheter på 3-faser

› Beräkning av FOURIER FFT

Beräkning av I_0

$$I_0 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} I dt + \int_{T/2}^T (-I) dt \right] = \frac{I}{T} [t_0^{T/2} - t_{T/2}^T]$$

$$I_0 = \frac{I}{T} \left[\frac{T}{2} - 0 - T + \frac{T}{2} \right] = 0$$

Resultatet på denna beräkning är given då symmetrin i relation till tidaxeln $i(t)$ är identisk.

Beräkning av A_n

$$A_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} I \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{T/2}^T I \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right]$$

$$A_n = \frac{I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[\sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) \Big|_0^{T/2} - \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) \Big|_{T/2}^T \right]$$

$$A_n = \frac{I}{2\pi \cdot n} [\sin(n \cdot \pi) - \sin(0) - \sin(n \cdot 2\pi) + \sin(n \cdot \pi)]$$

$$A_n = 0$$

Beräkning av B_n

$$B_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} I \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{T/2}^T I \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[-\cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) \Big|_0^{T/2} + \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) \Big|_{T/2}^T \right]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [-\cos(n \cdot \pi) + \cos(0) + \cos(n \cdot 2\pi) - \cos(n \cdot \pi)]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [-(-1)^n + 1 + 1 - (-1)^n]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{\pi \cdot n} [1 - (-1)^n]$$

Om n är en jämn siffra, B_n är lika med 0. Om n är udda, B_n skrivs som : $B_n = \frac{4 \cdot I}{n\pi}$

Signalen består av $i(t)$ i FOURIER-analysen, och skrivs som :

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4 \cdot I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ udda})$$

Observera :

För beräkning av A_n och B_n , värden är det en god ide att välja tiden på grundtonen, så att det blir en symmetri i den matematiska beskrivningen av signalen. Detta sparar mycket tid för att göra beräkningen.

› Tidsbaserad visning

Med de matematiska uträkningarna här ovan, är det möjligt att rekonstruera signalen med mer eller mindre exakthet.

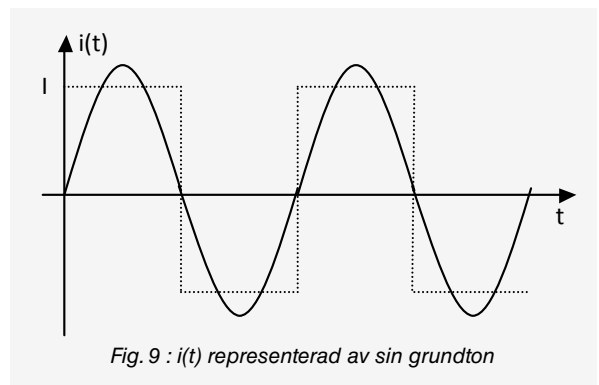
- Med endast första kurvan (fig. 9) : $i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t$

Denna första är även kallad grundton.

- Med de två första kurvorna : $i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t$

- Med de tre första kurvorna : $i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t$

Ju fler kurvor som läggs in i formeln, desto närmare är den beräknade signalen originalsignalen.



Samtidig visning av alla elektriska storheter på 3-faser

3. Vektorial visning av signaler

Med Fresnel- (fastföljds- eller vektor-) diagrammet visas amplituden och fasvridningen på signalen. Det går även att använda vektorialvisningen för sinus eller cosinus funktioner på ett enkelt sätt.

Den vektoriella visningen av ett ström och spänningsförhållande på en sinus form är ett sätt att endast se signalens fasvinkel och amplitud. Detta resultat kan även användas genom att använda komplexa siffror.

A. Vektordiagram

Fasföljdsvisning kan endast göras på sinussignaler.

Sinussignalen $x(t)$ uttrycks med följande formel:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi)$$

X är amplituden på sinussignalen $x(t)$

ω är vinkelns frekvens på sinussignalen $x(t)$

φ är grundfasen på sinussignalen $x(t)$

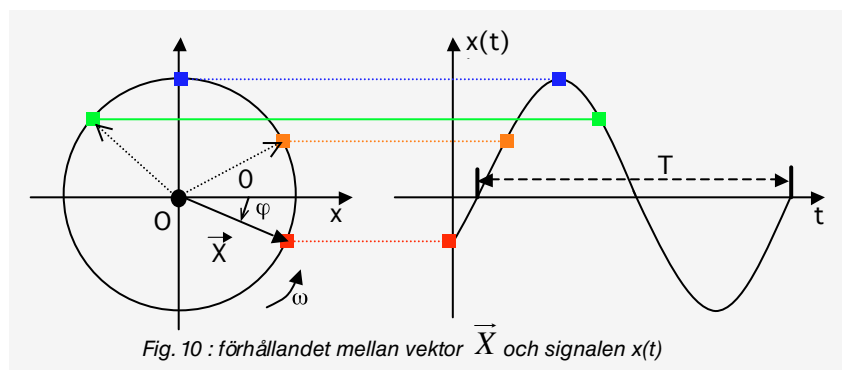
Denna visning är baserad på förhållandet mellan en amplitud vektor X samt den roterar med ω runt en punkt på signal O på samma tidsaxel (fig. 10).

φ är grundfasen (för $t = 0$).

Vinkeln mellan vektor \vec{X} i förhållande till originalfasens axel Ox vilken är lika med $(\omega t + \varphi)$.

Perioden T uttrycks med följande formel :

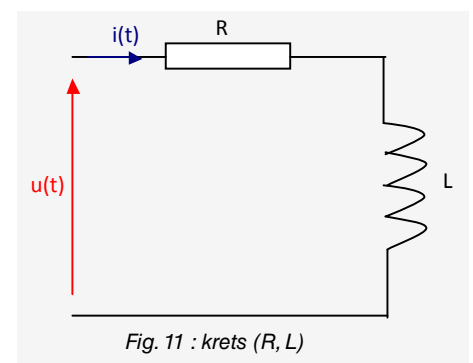
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



B. FRESNEL-diagram

För att studera sinussignaler (ström och spänning) relaterade till en samma krets, används vanligtvis ett FRESNEL-diagram. Sinusstorheterna har samma vinkel frekvens. Endast amplituden samt faserna är olika. En visning med vektorerna från ett givet ögonblick är därför tillräckligt för att se eventuella problem i kretsen.

(Figur 11).



Exempel 1 : induktiv krets

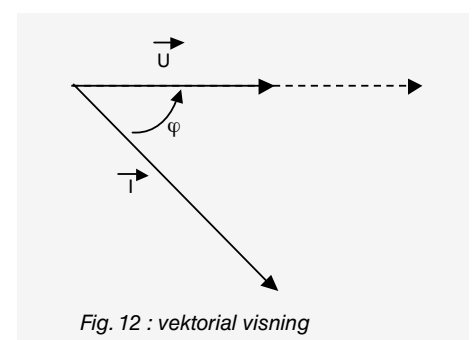
$u(t) = U_{\max} \sin \omega t$ i ett permanent läge är strömmen $i(t)$ lika med :

$$i(t) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{med} \quad \text{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

Med ett FRESNEL-diagram (fig. 12),

är spänningen och strömmen representerade av vektorer \vec{U} och \vec{I} :

Notera att vinkeln φ alltid är orienterad från strömmen mot spänningen.



Samtidig visning av alla elektriska storheter på 3-faser

Exempel 2 : 3-fas spänningssystem

Med ett 3-fas spänningssystem uttrycks som följande :

$$\begin{aligned} v_1(t) &= V_{\max} \sin \omega.t \\ v_2(t) &= V_{\max} \sin(\omega.t - \frac{2.\pi}{3}) \\ v_3(t) &= V_{\max} \sin(\omega.t - \frac{4.\pi}{3}) \end{aligned}$$

Figur. 3, visar den vektoriellt med ett FRESNEL-(fasföljds) diagram på detta tre-fas system

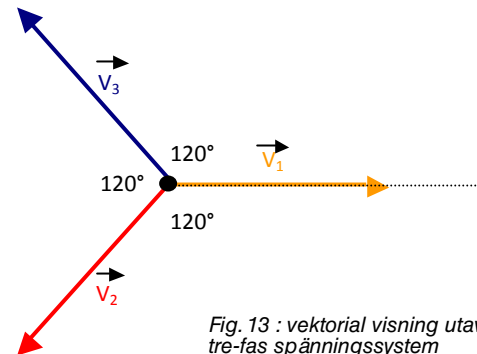


Fig. 13 : vektorial visning utav ett tre-fas spänningssystem

4. Övertonsvisning på signaler

En signal som inte är en ren sinus är mycket mer komplex. Den kan bestå av många olika frekvenser. Dess spektrum ger information om de olika frekvenskomponenter som signalen innehåller. Spektrat på en signal visar amplituder på olika komponenter som finns i signalen, som en funktion av frekvenserna.

När signalen $x(t)$ är periodisk men inte en ren sinus ingår några matematiska komponenter (vilket är normalfallet för signaler inom spänningssystem), kan ett FOURIER-diagram användas för att se den tidsbaserade representationen för en signal komponerad av en DC-signal samt en sinussignal vilkas frekvenser är multiplar av grundfrekvensen.

Detta är särskilt användbart när signalens frekvenser och amplituder på de olika sinuskomponenterna ska granskas, vilket ges i beräkningen av FOURIER-diagrammet.

I fallet med en ren sinussignal (fig. 14) uttrycks den med följande formel:

$$x(t) = X \sin \omega.t$$

vi ser närvaron av amplituden X för en sinussignal med fyrkantsvåg ω (eller frekvens f).

Med denna information, vilken är grundläggande för elnätanalys, kan visas som en graf med amplituden på sinussignalen på Y-axeln samt frekvensen på X-axeln. Denna grafiska visning visar signal $x(t)$ samt övertonshalten på signalen $x(t)$ (fig. 15).

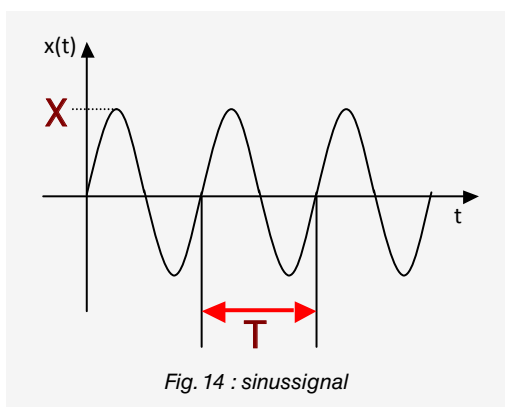


Fig. 14 : sinussignal

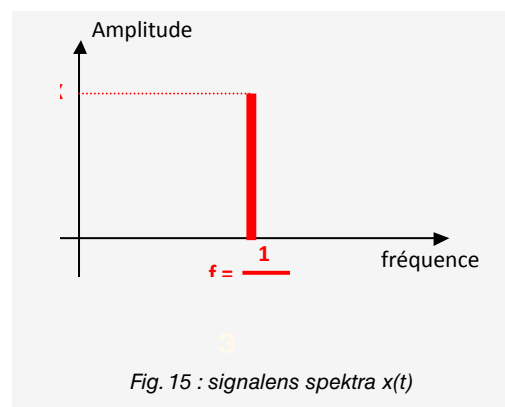


Fig. 15 : signalens spektra $x(t)$

Samtidig visning av alla elektriska storheter på 3-faser

Exempel : fyrkantsvåg

En ström $i(t)$ uttrycks med följande matematiska formel:

$$i(t) = I \text{ över en halv-period}$$

$$i(t) = -I \text{ över en halv-period}$$

Figur 16 visar en tidsbaserad signal $i(t)$.

Beräkningen av FOURIER på denna signal $i(t)$ uttrycks med följande formel:

$$i(t) = \frac{4.I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4.I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4.I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4.I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ udda})$$

Denna signal har ingen DC-komponent, vilket ger :

- en sinussignal med frekvensen f (signalens grundfrekvens) och amplituden $\frac{4.I}{\pi}$
- en sinussignal med frekvensen $3f$ med amplituden $\frac{4.I}{3\pi}$
- en sinussignal med frekvensen $5f$ med amplituden $\frac{4.I}{5\pi}$
- o.s.v...

Denna beskrivning kan användas för att visa övertonshalten i figur 17:

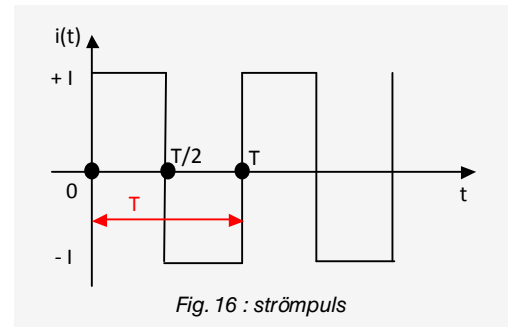


Fig. 16 : strömpuls

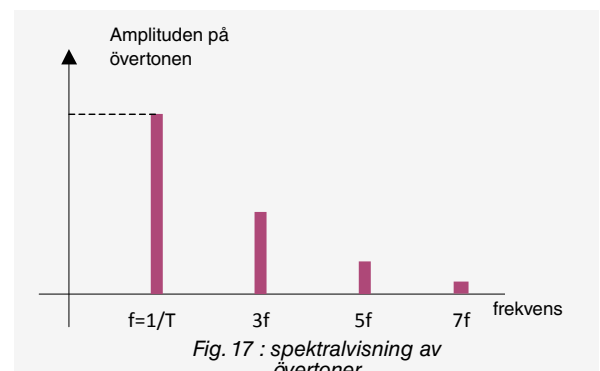
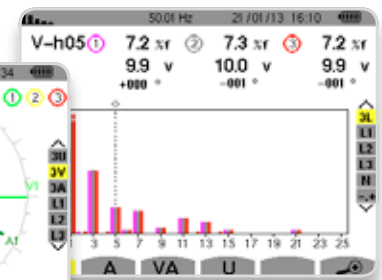
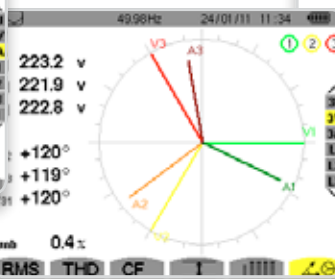
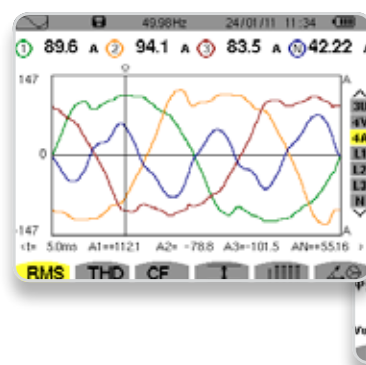


Fig. 17 : spektralvisning av övertoner



Effekt- och energianalysatorer **Chauvin-Arnoux Qualistar+** visar alla elektriska storheter direkt på skärmen i realtid.

Multiple representations of a **three-phase** electrical signal



Qualistar+ power and energy analysers can be used to view the characteristics of a three-phase electrical network instantaneously.

The Qualistar+ models display the signals from all the inputs simultaneously. The measurements are displayed as values, waveforms, spectral representations or Fresnel diagrams.

**Time-based
representation**

**Spectral
representation**

**Vectorial
representation**

Multiple representations of a three-phase electrical signal

1. Three-phase voltages

Electrical energy is transmitted from its production site (source) to the point of distribution (load) via three conductor wires. Industrial installations are the main sites supplied with three-phase alternating current. A three-phase circuit receives three sinusoidal voltages with the same frequency.

A three-phase voltage distribution system (fig. 1) comprises 3 line conductors and (sometimes) what is known as a "neutral" conductor:

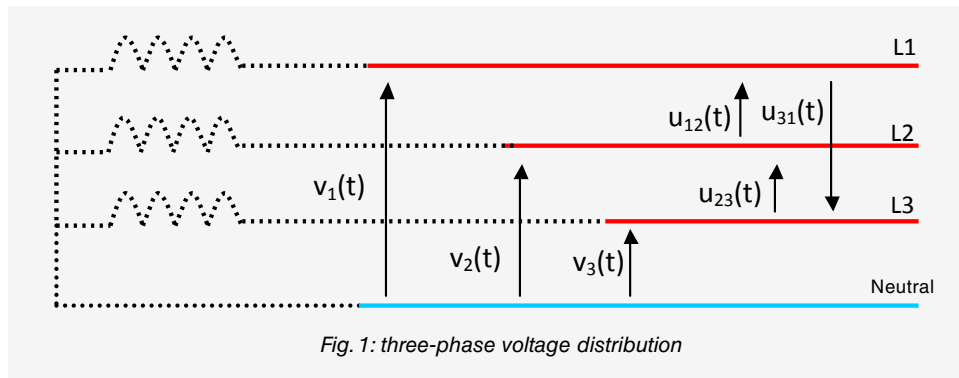


Fig. 1: three-phase voltage distribution

A. Equations and associated properties

The three-phase voltage system represented by $v_1(t)$, $v_2(t)$ and $v_3(t)$ is defined by the following equations:

$$\begin{aligned}v_1(t) &= V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t) \\v_2(t) &= V_2 \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\v_3(t) &= V_3 \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

In theory:

- the amplitudes of the 3 voltages are equal,
- the respective phase angles are equal (120°),
- the voltages are perfectly sinusoidal.

In practice, these properties are not checked. The significance of the faults can be quantified by measuring the **unbalance and total harmonic distortion**.

The voltages $v_1(t)$, $v_2(t)$ and $v_3(t)$ are called "phase-to-neutral" voltages. The voltages measured between phases are called "phase-to-phase" voltages. When three-phase systems of phase-to-neutral voltages are perfect, the equations of these phase-to-phase voltages are defined as follows:

$$\begin{aligned}u_{12}(t) &= v_1(t) - v_2(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\u_{23}(t) &= v_2(t) - v_3(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\u_{31}(t) &= v_3(t) - v_1(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

The amplitudes (and the RMS values) of the phase-to-phase voltages are $\sqrt{3}$ greater than those of the phase-to-neutral voltages. The sum of the 3 components of a three-phase voltage system is equal to 0.

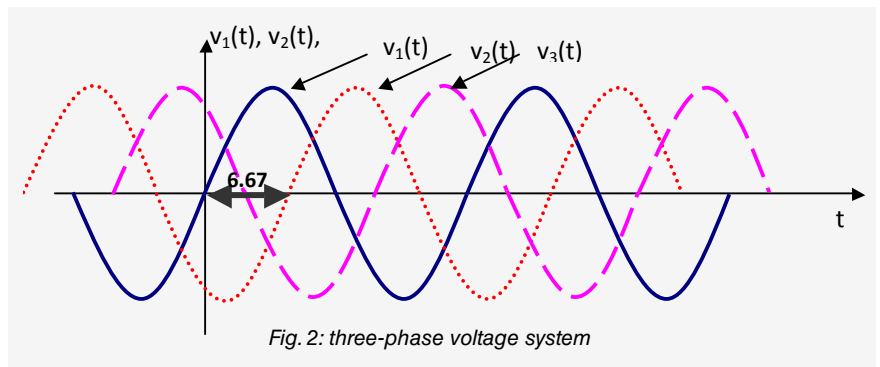
Multiple representations of a three-phase electrical signal

B. Time-based representation

The three-phase system of phase-to-neutral voltages (fig. 2) comprises 3 voltage sinusoids which follow one another with an offset of 6.6 ms. Indeed,

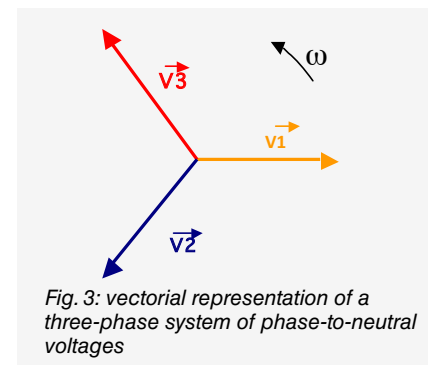
$$\omega \cdot t_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$t_0 = \frac{2\pi}{3 \cdot \omega} = \frac{2\pi}{3 \cdot 314} = 6.67 \text{ ms}$$



C. Vectorial representation

The three-phase system of phase-to-neutral voltages described above can be represented in a vectorial diagram (fig. 3). The lengths of the vectors correspond to the amplitudes of the sinusoids which form the system. In electrical engineering, the users are usually interested in the RMS values, so the **vectorial representation** of the system is very often based on the RMS values of the sinusoidal functions.



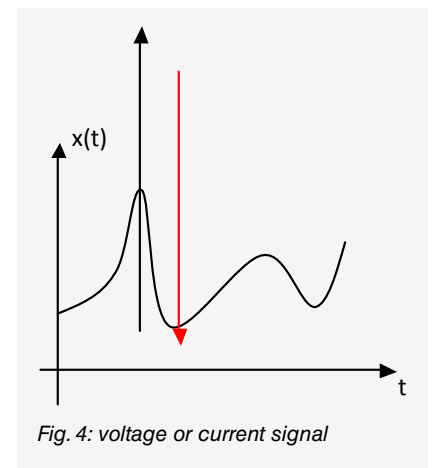
2. Time-based representation of signals

The electrical signals are represented on an oscillogram. A signal is the variation of an analogue electrical quantity (voltage or current) as a function of time. These functions vary continuously over time according to a mathematical law.

A voltage or current signal (fig. 4) which evolves as a function of time can be characterized by a mathematical relation of the following type:

$$t \rightarrow x(t)$$

where $x(t)$ represents the signal's value for each value of passing time t . This is usually called the **instantaneous value**.



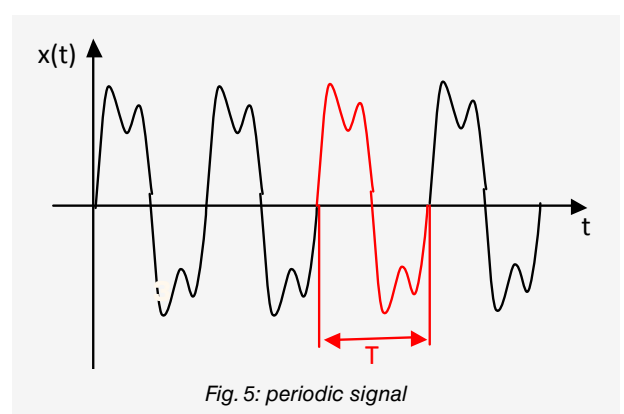
Specific properties

Periodic signal

A signal $x(t)$ is **periodic** when the following relation is true:

$$x(t + T) = x(t)$$

The signal repeats identically over time. The time interval between two moments when the signal shows exactly the same characteristics is called the **T period** (fig. 5).



Multiple representations of a three-phase electrical signal

FOURIER series

When the signal is periodic but non-sinusoidal, and subject to certain mathematical properties (which are generally true for the signals usually dealt with in electrical engineering), a **FOURIER series transform** can be used to obtain a time-based representation comprising only a DC signal and sinusoidal signals whose frequencies are multiples of the basic signal's frequency. This property is particularly useful for reasons of calculation (calculation with complex numbers) and representation (**spectral representation**).

This transform is performed as follows:

Let $x(t)$ be a periodic signal with the period T .

The decomposition of $x(t)$ into FOURIER series is given by the following formula:

$$x(t) = \begin{cases} X_0 + \\ A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_n \cos n\omega t + \\ B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_n \sin n\omega t \end{cases}$$

where:

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) dt$$

X_0 is called the DC component of the signal $x(t)$;

A_n and B_n are coefficients which represent the amplitudes of the harmonics of order n of the signal $x(t)$.

Examples

DC voltage

$$u(t) = E$$

The voltage $u(t)$ (fig. 6) does not vary over time.

It is not periodic, so it cannot be decomposed into a FOURIER series.

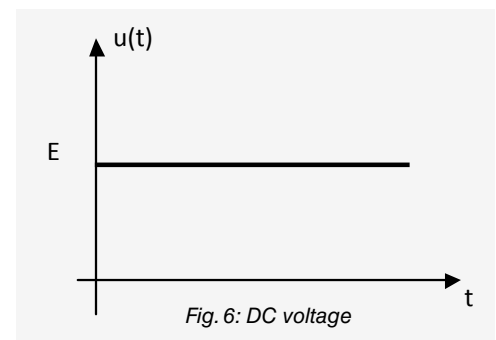


Fig. 6: DC voltage

Sinusoidal alternating current (fig. 7)

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

This signal is periodic with period T because:

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

$$i(t+T) = I_{\max} \sin[\omega(t+T)] = I_{\max} \sin(\omega t + 2\pi) = I_{\max} \sin \omega t$$

$i(t+T) = i(t)$ this signal is therefore periodic with period T .

There is no point in calculating the FOURIER series of this signal because $i(t)$ is a pure sine curve.

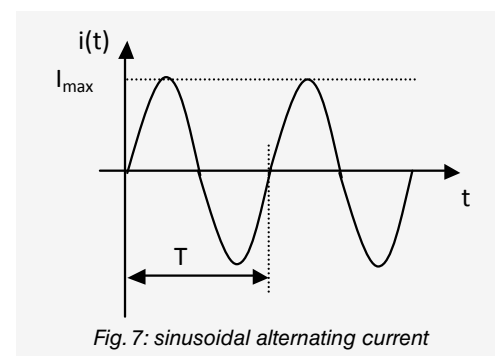


Fig. 7: sinusoidal alternating current

Crenellated current signal (fig. 8)

$$\begin{cases} i(t) = I \text{ over one half-period} \\ i(t) = -I \text{ over one half-period} \end{cases}$$

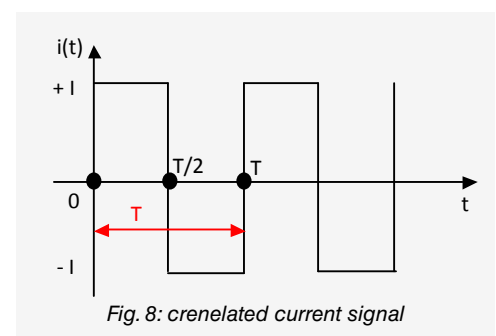


Fig. 8: crenellated current signal

Multiple representations of a three-phase electrical signal

Calculation of the FOURIER series

Calculation of I_0

$$I_0 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} I dt + \int_{T/2}^T (-I) dt \right] = \frac{I}{T} [t_0^{T/2} - t_{T/2}^T]$$

$$I_0 = \frac{I}{T} \left[\frac{T}{2} - 0 - T + \frac{T}{2} \right] = 0$$

The result of this calculation was expected due to the symmetry in relation to the time axis of the signal $i(t)$.

Calculation of A_n

$$A_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} I \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{T/2}^T I \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right]$$

$$A_n = \frac{I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[\sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_0^{T/2} - \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_{T/2}^T \right]$$

$$A_n = \frac{I}{2\pi \cdot n} [\sin(n \cdot \pi) - \sin(0) - \sin(n \cdot 2\pi) + \sin(n \cdot \pi)]$$

$$A_n = 0$$

Calculation of B_n

$$B_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} I \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{T/2}^T I \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[-\cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_0^{T/2} + \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_{T/2}^T \right]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [-\cos(n \cdot \pi) + \cos(0) + \cos(n \cdot 2\pi) - \cos(n \cdot \pi)]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [-(-1)^n + 1 + 1 - (-1)^n]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{\pi \cdot n} [1 - (-1)^n]$$

If n is even, B_n is equal to 0. If n is odd, B_n can be written as: $B_n = \frac{4 \cdot I}{n\pi}$

The decomposition of the signal $i(t)$ into FOURIER series can then be written as:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4 \cdot I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ odd})$$

Important note:

For calculation of the A_n and B_n values, it may be a good idea to choose the time origin so that it creates symmetries in the mathematical description of the signal. This may save considerable time during the calculation stage.

Time-based representation

With the series calculated previously, it is possible to reconstruct the original signal more or less accurately.

- With the first term only (fig. 9):

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t$$

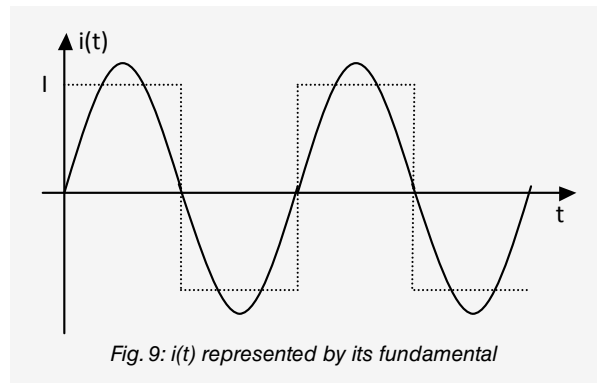
This first term is also called the fundamental.

- With the first two terms:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t$$

- With the first three terms:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t$$



The more terms you add in the series, the closer the recomposed signal is to the original signal.

Multiple representations of a three-phase electrical signal

3. Vectorial representation of signals

With the Fresnel diagram, we showed the amplitudes and phases of the signals. We can then make use of vectorial operations which are much more convenient than operations on sine and cosine functions.

The vectorial representation of the current-voltage relations in a sinusoidal state is a way of only keeping the signal's phase angle and amplitude. This result can also be achieved by using complex numbers.

A. Temporal - vectorial correspondence

Vectorial representation is only possible for sinusoidal signals.

Let us consider the sinusoidal signal $x(t)$ given by the following relation:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi)$$

X is the amplitude of the sinusoidal signal $x(t)$

ω is the angular frequency of the sinusoidal signal $x(t)$

φ is the originating phase of the sinusoidal signal $x(t)$

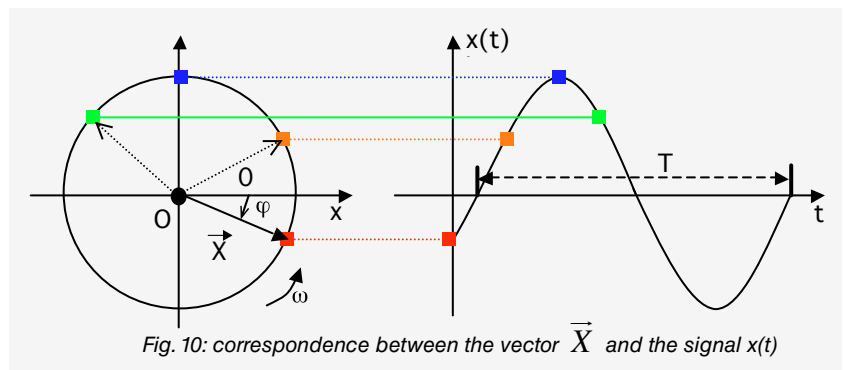
This representation is based on the correspondence between an amplitude vector X and rotating at the speed ω around a point of origin of this signal O on a time axis (fig. 10).

φ is the originating phase (for $t = 0$).

The angle travelled by the vector \vec{X} in relation to the original axis Ox is equal to $(\omega t + \varphi)$.

The period T is given by the following relation:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



B. FRESNEL diagram

When seeking to study sinusoidal signals (current and voltage) relative to a given circuit, a vectorial representation called a FRESNEL diagram is widely used. The sinusoidal quantities have the same angular frequency. Only the amplitudes and initial phases are different. A representation of the vectors for a given moment is therefore sufficient to deal with the problems (fig. 11).

Usually, the time origin ($t = 0$) is used.

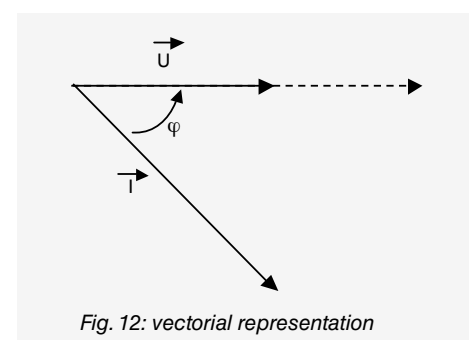
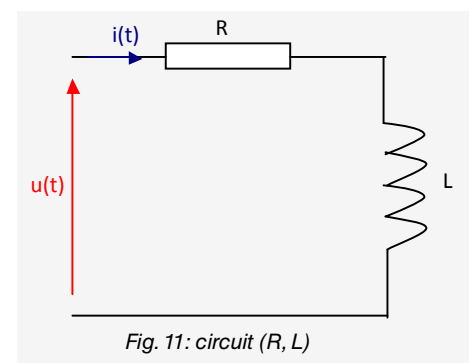
Example 1: inductive circuit

$u(t) = U_{\max} \sin \omega t$ in a steady state, the current $i(t)$ is equal to:

$$i(t) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{with} \quad \text{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

With a FRESNEL diagram (fig. 12), the voltage and current are represented by the vectors \vec{U} and \vec{I} :

It should be noted that, conventionally, the angle φ is always oriented from the current towards the voltage.



Multiple representations of a three-phase electrical signal

Example 2: three-phase voltage system

Let us take the three-phase voltage system represented by the following equations:

$$v_1(t) = V_{\max} \sin \omega.t$$

$$v_2(t) = V_{\max} \sin\left(\omega.t - \frac{2.\pi}{3}\right)$$

$$v_3(t) = V_{\max} \sin\left(\omega.t - \frac{4.\pi}{3}\right)$$

Fig. 3 shows the vectorial representation (FRESNEL diagram) of this three-phase system.

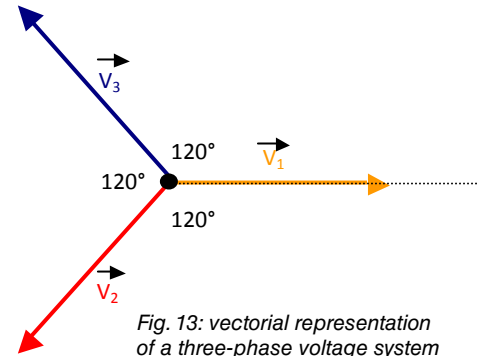


Fig. 13: vectorial representation of a three-phase voltage system

4. Spectral representation of signals

A non-sinusoidal signal is more complex. It may contain multiple frequencies. Its spectrum therefore provides information on the different frequency components which it contains. The spectrum of a signal is the representation of the amplitudes of the different components present in the signal, as a function of the frequencies.

When a signal $x(t)$ is periodic but non-sinusoidal, and subject to certain mathematical properties (which are generally true for the signals usually involved in electrical engineering), a FOURIER transform can be used to obtain a time-based representation comprising only a DC signal and sinusoidal signals whose frequencies are multiples of the basic signal's frequency.

This property is particularly useful for representing the signal while highlighting the frequencies and amplitudes of the different sinusoidal components given by the calculation of the FOURIER series decomposition.

In the case of a pure sinusoidal signal (fig. 14) described by the following equation:

$$x(t) = X \sin \omega.t$$

we see the appearance of an amplitude X for a sinusoidal signal with an angular frequency ω (or frequency f).

These two pieces of information, which are very important in the context of network analysis, can be plotted on a graph with the amplitude of the sinusoid on the Y axis and the frequency on the X axis. This graphical representation linked to the signal $x(t)$ is the spectral representation of the signal $x(t)$ (fig. 15).

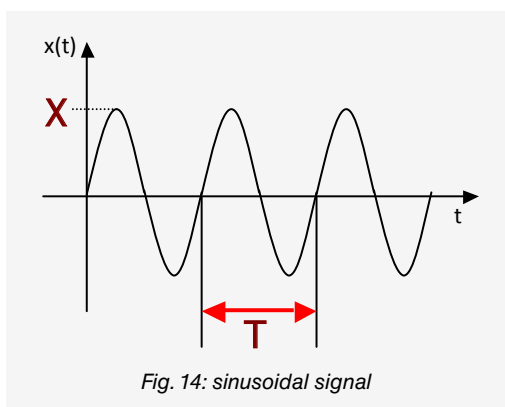


Fig. 14: sinusoidal signal

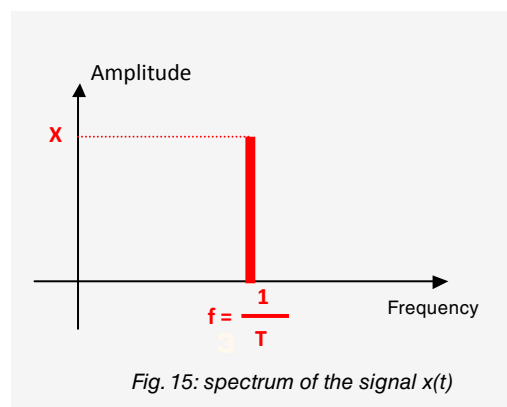


Fig. 15: spectrum of the signal $x(t)$

Multiple representations of a three-phase electrical signal

Example: square signal

A current $i(t)$ is described by the following mathematical relation:

$$\begin{cases} i(t) = I \text{ over one half-period} \\ i(t) = -I \text{ over one half-period} \end{cases}$$

Figure 16 shows a time-based representation of $i(t)$.

Calculation of the FOURIER series for this signal $i(t)$ gives the following equation:

$$i(t) = \frac{4.I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4.I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4.I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4.I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ odd})$$

This signal does not have any DC component. It comprises:

- a sinusoidal signal with the frequency f (the frequency of the basic signal) and the amplitude $\frac{4.I}{\pi}$
- a sinusoidal signal with the frequency $3f$ and the amplitude $\frac{4.I}{3.\pi}$
- a sinusoidal signal with the frequency $5f$ and the amplitude $\frac{4.I}{5.\pi}$
- etc.

This description can be used to establish the following spectral (or harmonic) representation (fig. 17):

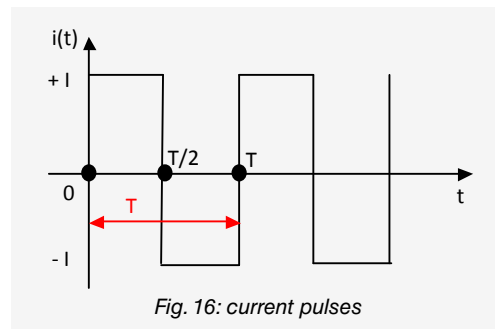


Fig. 16: current pulses

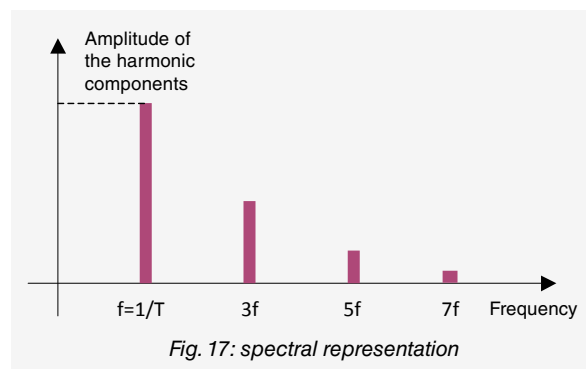
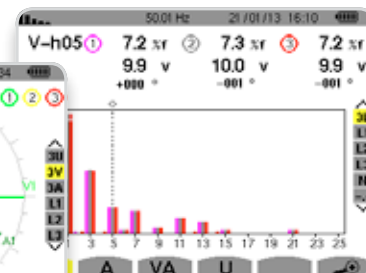
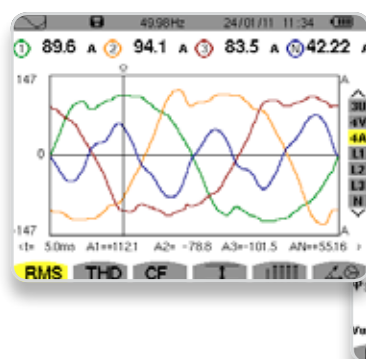


Fig. 17: spectral representation



The power and energy analysers in the **Qualistar+ range** can be used to view all these representations.

FRANCE
Chauvin Arnoux
 190, rue Championnet
 75876 PARIS Cedex 18
 Tel: +33 1 44 85 44 38
 Fax: +33 1 46 27 95 59
 export@chauvin-arnoux.fr
 www.chauvin-arnoux.com

UNITED KINGDOM
Chauvin Arnoux Ltd
 Unit 1 Nelson Ct, Flagship Sq, Shaw Cross Business Pk
 Dewsbury, West Yorkshire - WF12 7TH
 Tel: +44 1924 460 494
 Fax: +44 1924 455 328
 export@chauvin-arnoux.com
 www.chauvin-arnoux.com

MIDDLE EAST
Chauvin Arnoux Middle East
 P.O. BOX 60-154
 1241 2020 JAL EL DIB - LEBANON
 Tel: +961 1 890 425
 Fax: +961 1 890 424
 camie@chauvin-arnoux.com
 www.chauvin-arnoux.com

 **CHAUVIN
 ARNOUX**
 GROUP

Sähköisen **3-vaihesignaalin** analysointi



Qualistar+ sarjan teho- ja energia-analysaattoreita voidaan käyttää 3-vaihesähköverkon tarkasteluun. Kaikkien parametrien tarkastelu onnistuu suoraan laitteen värinäytöltä.

Qualistar+ näyttää samanaikaisesti kaikkien tulojen sisään-tulosignaalit. Mittaustulokset esitetään kuvaajamuodossa, yliaaltoina tai vektorikuvaajamuodossa (Fresnel).

Aikaan perustuva näyttö

Yliaaltojen näyttö

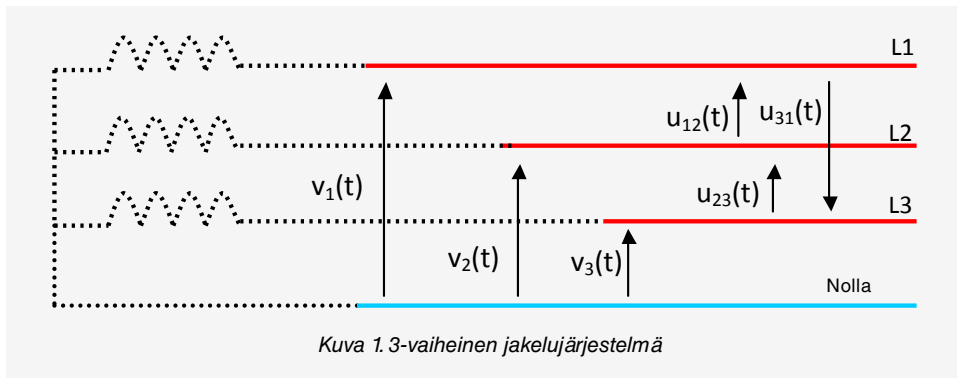
Vektorikuvaaja

Sähköisen 3-vaihesignaalin analysointi

1. 3-vaihejännitteet

Tuotettu sähköenergia siirretään kulutuskohteeseen kolmen johtimen kautta. Suomessa kuluttaja-asennukset koostuvat 4:stä johtimesta: 3 johdinta + "yhdistetty nolla-PE -johdin". 3-vaihepiiri vastaanottaa kolme saman taajuuden omaavaa sinimuotoista jännitettä.

3-vaiheinen jakelujärjestelmä (kuva 1) koostuu kolmesta johtimesta sekä nolajohtimesta:



A. Laskelmat

3-vaiheiseen järjestelmään kuuluu $v_1(t)$, $v_2(t)$ ja $v_3(t)$ alla olevan kaavan mukaisesti:

$$\begin{aligned}v_1(t) &= V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t) \\v_2(t) &= V_2 \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\v_3(t) &= V_3 \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

Teoriassa:

- amplitudi on saman kokoinen kaikille 3:lle jännitteelle,
- vaiheiden välinen kulma (120°) on sama kaikille,
- jännite koostuu täydellisestä siniaallosta.

Käytännössä teoriat eivät pidä paikkansa. Vikojen merkitys voidaan määrittää mittaamalla **epätasapaino** sekä **THD**.

Jännitteitä $v_1(t)$, $v_2(t)$ ja $v_3(t)$ kutsutaan "vaihe-vaihe" tai "vaihe-nolla" -jännitteiksi. Vaiheiden välillä mitattavia jännitteitä kutsutaan vaihe-vaihe -jännitteiksi. Kun vaihe-nolla -jännitteinen 3-vaihejärjestelmä on täydellinen, ilmaistaan jännitteet seuraavanlaisesti:

$$\begin{aligned}u_{12}(t) &= v_1(t) - v_2(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\u_{23}(t) &= v_2(t) - v_3(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\u_{31}(t) &= v_3(t) - v_1(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

Vaihe-vaihe -jännitteiden amplitudi (sekä RMS-arvo) on $\sqrt{3}$ vaihe-nolla jännitettä suurempi. Kolmen, 3-vaihejärjestelmässä sijaitsevan komponentin summa on 0.

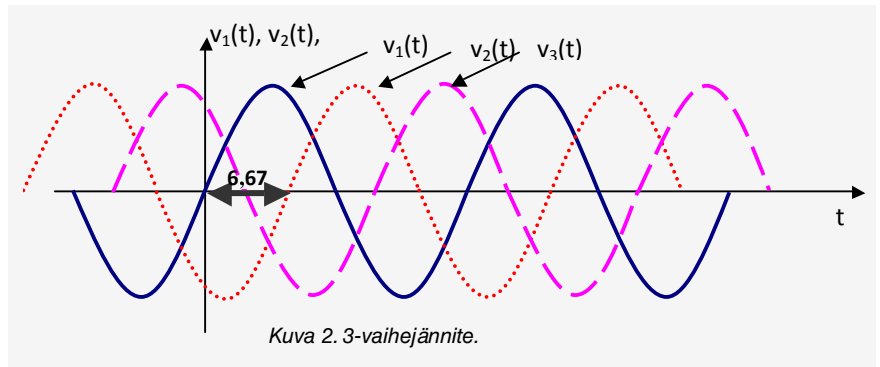
Sähköisen 3-vaihesignaalin analysointi

B. Aikaan perustuva näyttö

Vaihe-nolla jännitteinen 3-vaihejärjestelmä koostuu kolmesta toisiaan 6,6 ms:n viiveellä seuraavasta sinisignaalista. Eli,

$$\omega \cdot t_0 = \frac{2\pi}{3}$$

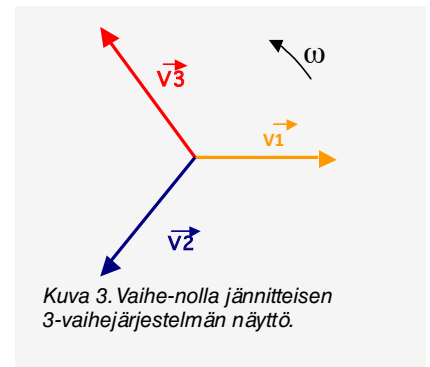
$$t_0 = \frac{2\pi}{3 \cdot \omega} = \frac{2\pi}{3 \cdot 314} = 6,67 \text{ ms}$$



Kuva 2. 3-vaihejännite.

C. Vektorikuvaaja

Vaihe-nolla jännitteinen 3-vaihejärjestelmä voidaan ilmaista vektorikuvaajamuodossa. Vektorien pituudet riippuvat järjestelmän muodostamista sinisignaalin amplitudeista. Käytännössä ollaan kiinnostuneita RMS-arvoista, joten vektoriaalinen eistysmuoto perustuu usein siniaallon RMS-arvoihin.



Kuva 3. Vaihe-nolla jännitteisen 3-vaihejärjestelmän näyttö.

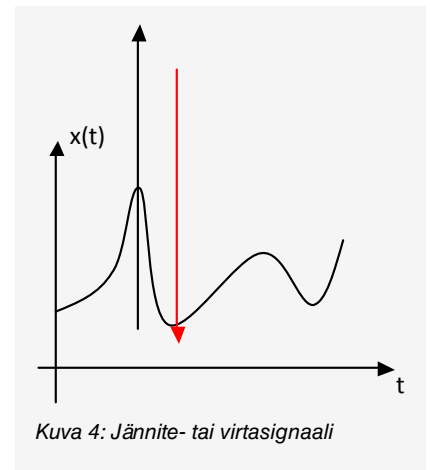
2. Aikaan perustuva signaalien näyttö

Sähkösignaalit esitetään oskillogrammissa. Signaali koostuu sähköisten suureiden (jännite tai virta) vaihteluista ajan funktiona.

Ajan funktiona näytettävä jännite- tai virtasignaali (kuva 4) voidaan ilmaista seuraavan matemaattisen funktion avulla:

$$t \rightarrow x(t)$$

jossa $x(t)$ kuvaa signaalin arvoa joka kerta tämän ylittäessä ajan t . Tätä kutsutaan yleensä **jatkuvaksi** arvoksi.



Kuva 4: Jännite- tai virtasignaali

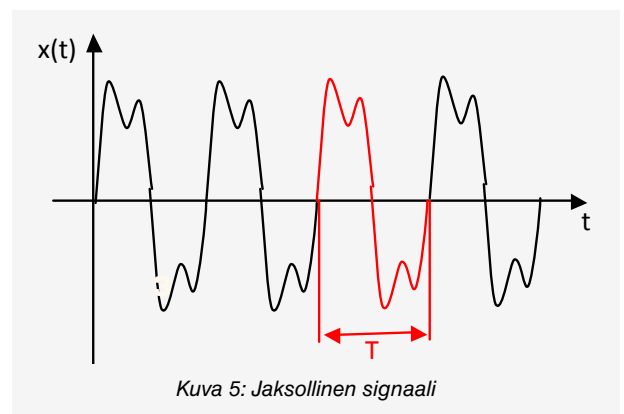
Erityistapauksia

Jaksollinen signaali

Signaali $x(t)$ on jaksollinen, mikäli seuraava funktio pitää paikkansa:

$$x(t + T) = x(t)$$

Signaali toistuu identtisenä ajan myötä. Kahden ajan välistä aikaväliä (samoilla ominaisuuksilla) kutsutaan **T-jaksoksi** (kuva 5.)



Kuva 5: Jaksollinen signaali

Sähköisen 3-vaihesignaalin analysointi

Fourier FFT-analyysi

Signaalin ollessa jaksollinen mutta ei sinimuotoinen, sekä laskettu tiettyjen matemaattisten kaavojen mukaisesti (mikä käytännössä usein pitää paikkansa), voidaan laskennassa käyttää avuksi FOURIER FFT-analyysia. Näin ollen saadaan aikaiseksi aikaan perustuva näyttö, mikä koostuu ainoastaan DC- sekä sinisignaaleista, joiden taajuudet ovat perustaajuuden kerrannaisia. Tämä on erityisen käytännöllistä laskelmia (komplekseihin luvuihin) tehtäessä tai FFT-analyysia laadittaessa (näyttö spektrimuodossa).

Tämä voidaan ilmaista myös alla olevan kaavan avulla:

Mikäli $x(t)$ on jaksollinen signaali T-jakson kanssa,

koostuu $x(t)$ FOURIER-analyysista alla olevan kaavan mukaisesti:

$$x(t) = \begin{cases} X_0 + \\ A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_n \cos n\omega t + \\ B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_n \sin n\omega t \end{cases}$$

jossa:

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega \cdot t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega \cdot t) dt$$

X_0 on signaalin $x(t)$:n DC-komponentti;

A_n ja B_n -kertoimet edustavat signaalin $x(t)$ yliaaltojen (n järjestyksen) amplitudeja.

Esimerkiksi

Tasajännite

$$u(t) = E$$

Jännite $u(t)$ (kuva 6) ei vaihtelee ajan mukaan. Jännite ei ole jaksollinen, joten sitä ei voi esittää FOURIER-analyysimuodossa.

Vaihtovirta (Kuva 7)

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

Tämä signaali on jaksollinen T-jakson kanssa, koska:

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

$$i(t+T) = I_{\max} \sin[\omega(t+T)] = I_{\max} \sin(\omega t + 2\pi) = I_{\max} \sin \omega t$$

$i(t+T) = i(t)$ signaali on näin ollen jaksollinen T-jakson kanssa.

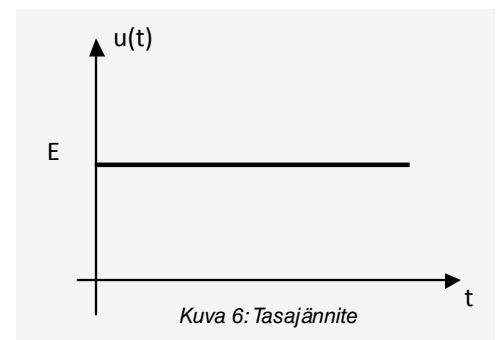
Signaalille on turha suorittaa FOURIER-laskenta, sillä $i(t)$ on puhdas sinimuotoinen signaali.

Virtapulssisignaali (Kuva 8)

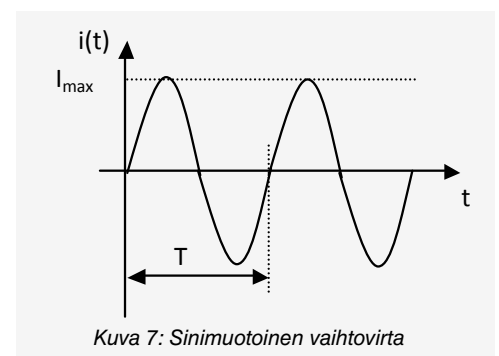
$$i(t) = I \text{ yli puolijakson}$$

$$i(t) = -I \text{ alle puolijakson}$$

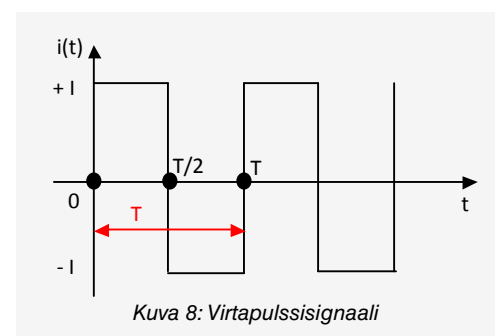
$$i(t) = -I \text{ sur une demi période}$$



Kuva 6: Tasajännite



Kuva 7: Sinimuotoinen vaihtovirta



Kuva 8: Virtapulssisignaali

Sähköisen 3-vaihesignaalin analysointi

FOURIER FFT:n laskenta

I_0 :n laskenta

$$I_0 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} I dt + \int_{T/2}^T (-I) dt \right] = \frac{I}{T} [t_0^{T/2} - t_{T/2}^T]$$

$$I_0 = \frac{I}{T} \left[\frac{T}{2} - 0 - T + \frac{T}{2} \right] = 0$$

Kyseisen laskelman tulos on itsestään selvä, johtuen symmetriasta suhteessa signaalin $i(t)$ aikajanaan.

A_n :n laskenta

$$A_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} I \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{T/2}^T I \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right]$$

$$A_n = \frac{I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[\sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_0^{T/2} - \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_{T/2}^T \right]$$

$$A_n = \frac{I}{2\pi \cdot n} [\sin(n \cdot \pi) - \sin(0) - \sin(n \cdot 2\pi) + \sin(n \cdot \pi)]$$

$$A_n = 0$$

B_n :n laskenta

$$B_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} I \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{T/2}^T I \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[-\cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_0^{T/2} + \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_{T/2}^T \right]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [-\cos(n \cdot \pi) + \cos(0) + \cos(n \cdot 2\pi) - \cos(n \cdot \pi)]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [-(-1)^n + 1 + 1 - (-1)^n]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{\pi \cdot n} [1 - (-1)^n]$$

Mikäli n on parillinen luku, on B_n yhtä kuin 0.

Jos n on pariton, voidaan B_n kirjoittaa muotoon: $B_n = \frac{4 \cdot I}{n\pi}$

$i(t)$ signaalin purku FOURIER-muotoon voidaan suorittaa seuraavanlaisesti:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4 \cdot I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ pariton})$$

Huomio:

A_n ja B_n -arvojen laskemiseksi on hyvä määrittää aika perustaajuudelle, jotta signaalin matemaattinen kuvaus olisi symmetrinen. Tämä voi mahdollisesti säästää huomattavasti aikaa laskentavaiheessa.

Aikaan perustuva näyttö

Edellä mainittujen kaavojen avulla on mahdollista rekonstruoida enemmän tai vähemmän tarkka signaali.

- Ainoastaan ensimmäinen käyrä (kuva 9):

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t$$

Ensimmäistä käyrää kutsutaan myös perustaajuudeksi.

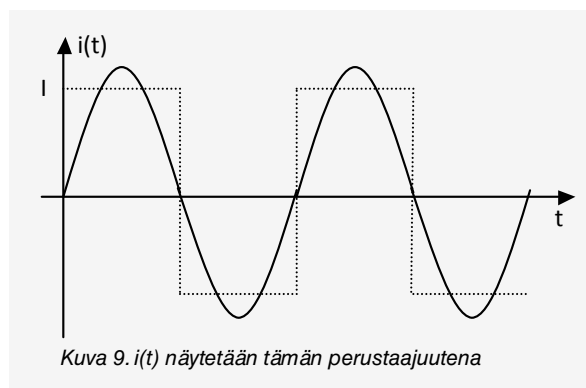
- Kaksi ensimmäistä käyrää:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t$$

- Kolme ensimmäistä käyrää:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t$$

Mitä enemmän kaavaan lisätään käyriä, sitä lähempänä laskennallinen signaali on alkuperäistä signaalia.



Kuva 9. $i(t)$ näytetään tämän perustaajuutena

Sähköisen 3-vaihesignaalin analysointi

3. Signaalien näyttö vektorikuvaajamuodossa

Fresnel (vaihejärjestys- tai vektori-) -kuvaajan avulla näytetään signaalin amplitudi sekä vaihesiirto. Vektorikuvaajien käyttö on käytännöllisempää kuin sini- ja cosinointimintojen käyttö.

Virta- ja jännitesuhteen vektoriaalinen esitys sinimuodossa on yksi tapa tarkastella signaalin vaihekulmaa sekä amplitudia.

A. Vektorikuvaaja

Vaihejärjestyksen näyttö on mahdollista ainoastaan sinimuotoisille signaaleille.

Sinisignaali $x(t)$ ilmaistaan seuraavaan kaavan avulla:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi)$$

X edustaa sinimuotoisen signaalin $x(t)$ amplitudia

ω edustaa sinimuotoisen signaalin $x(t)$ kulman taajuutta

φ edustaa sinimuotoisen signaalin $x(t)$ perusvaihetta

Kuvassa 10 kuvataan signaalilla O sijaitsevan pisteen sekä ω taajuuden omaavan vektorin \vec{X} välistä suhdetta.

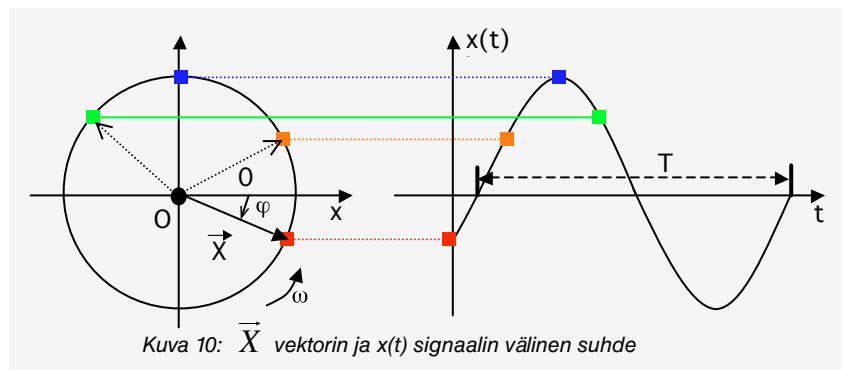
φ on perusvaihe ($t = 0$).

\vec{X} vektorin kulma suhteessa perusvaiheen

Ox akseliin on yhtä kuin $(\omega t + \varphi)$.

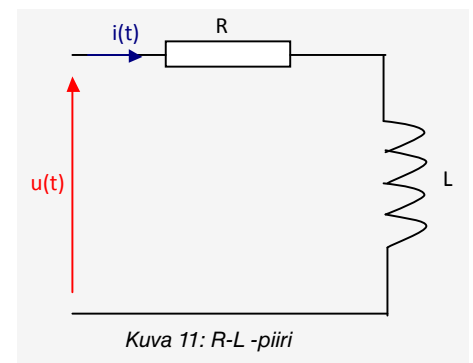
T -jakso ilmaistaan seuraavan kaavan avulla:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



B. Vektorikuvaaja (Fresnel)

FRESNEL-kuvaajaa käytetään yleensä silloin, kun halutaan tutkia samaan piiriin suhteessa olevia sinisignaaleja (virta ja jännite). Sinisuureet omaavat saman kulmataajuuden. Ainoastaan amplitudi sekä vaiheet eroavat toisistaan. Tarkastelemalla vektorikuvaajaa tietyssä ajankohtana, saadaan hyvä kuva piirin sen hetkisestä tilasta (kuva 11).



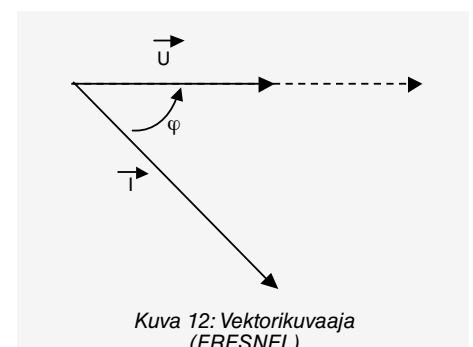
Esimerkki 1: induktiivinen piiri

$u(t) = U_{\max} \sin \omega t$ pysyvässä tilassa, on virta $i(t)$ yhtä kuin:

$$i(t) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{jossa} \quad \tan \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

\vec{U} ja \vec{I} -vektorit edustavat virtaa ja jännitettä FRESNEL-kuvaajassa (kuva 12):

Huomioi, että kulma φ on aina suunnattu virrasta jännitettä kohti.



Sähköisen 3-vaihesignaalin analysointi

Esimerkki 2: 3-vaiheinen jännitejärjestelmä

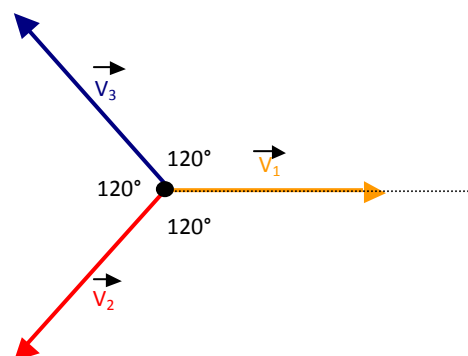
3-vaiheinen jännitejärjestelmä voidaan kuvata seuraavien yhtälöiden avulla:

$$v_1(t) = V_{\max} \sin \omega.t$$

$$v_2(t) = V_{\max} \sin\left(\omega.t - \frac{2.\pi}{3}\right)$$

$$v_3(t) = V_{\max} \sin\left(\omega.t - \frac{4.\pi}{3}\right)$$

Kuva 13. 3-vaihejärjestelmän näyttö vektorimuodossa



Kuva 13. 3-vaiheisen jännitejärjestelmän näyttö vektorimuodossa

4. Yliaaltojen näyttö

Signaali, joka ei ole puhdas sinisignaali, on erittäin kompleksi. Tällainen signaali voi koostua useista eri taajuuksista. Signaalin spektri tarjoaa näin ollen tietoa signaalin eri taajuuskomponenteista. Signaalin spektri edustaa eri komponenttien amplitudeja taajuuksien funktiona.

Signaalin ollessa jaksollinen mutta ei sinimuotoinen, sekä laskettu tiettyjen matemaattisten kaavojen mukaisesti (mikä käytännössä usein pitää paikkansa), voidaan tämän tarkastelussa käyttää FOURIER-kuvaajaa. Kuvaajasta ilmenee aikaan perustuva edustus, mikä koostuu ainoastaan DC- sekä sinisignaaleista, joiden taajuudet ovat parustaajuuden kerrannaisia.

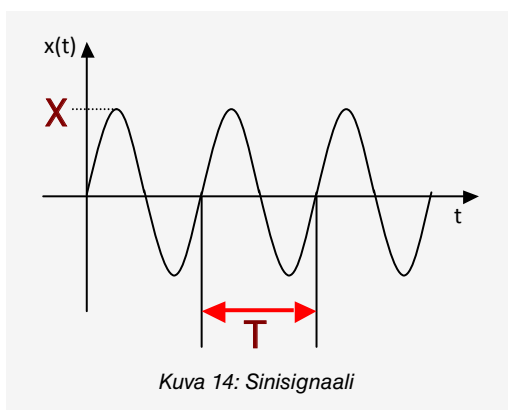
Tämä on erityisen käytännöllistä silloin kun halutaan tarkastella, FOURIER-analyysin avulla saatuja, sinimuotoisten signaalien taajuuksia sekä amplitudeja.

Kun kyseessä on puhdas sinisignaali (kuva 14), ilmaistaan tämä seuraavan kaavan avulla:

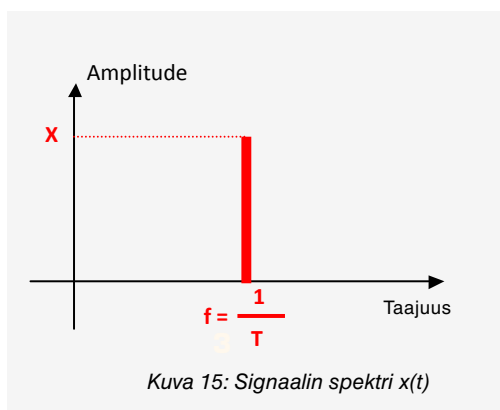
$$x(t) = X \sin \omega.t$$

jossa X edustaa kantiaallon ω (tai taajuuden f) omaavan sinisignaalin amplitudia.

Nämä verkkoanalysoinnin kannalta olennaiset tiedot voidaan esittää kuvaajamuodossa, jossa sinisignaalin amplitudi sijaitsee Y-akselilla ja taajuus X-akselilla. Alla olevassa kuvaajassa on esitettynä x(t) signaali sekä tämän yliaaltopitoisuus (kuva15).



Kuva 14: Sinisignaali



Kuva 15: Signaalin spektri x(t)

Sähköisen 3-vaihesignaalin analysointi

Esimerkki: Kantiaalto (signaali)

Virta $i(t)$ voidaan kuvata seuraavan kaavan avulla:

$$\left\{ \begin{array}{l} i(t) = I \text{ yli puolijakson} \\ i(t) = -I \text{ alle puolijakson} \end{array} \right.$$

Kuva 16 edustaa aikaan perustuvaa signaalia "i(t)".

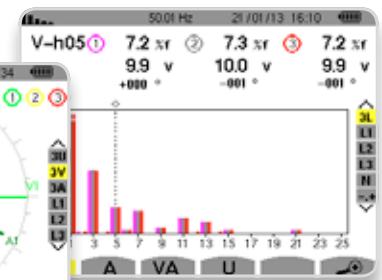
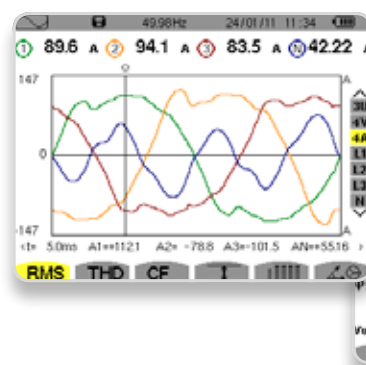
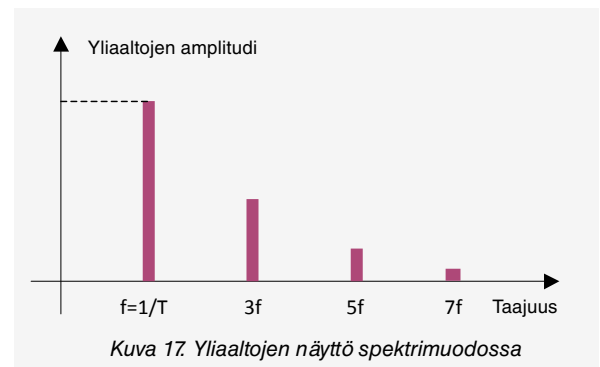
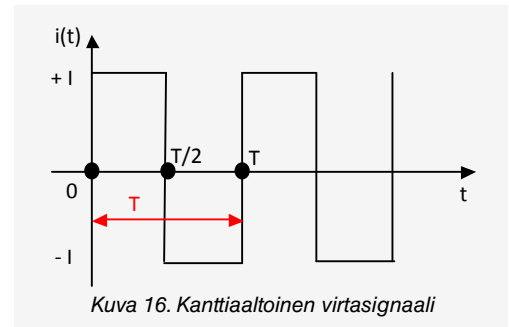
FOURIERin laskeminen signaalille $i(t)$ muodostaa seuraavan yhtälön:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4 \cdot I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ pariton})$$

Tämä signaali ei sisällä DC-komponenttia, jolloin saadaan:

- f taajuuden (signaalin perustaajuus) ja $\frac{4 \cdot I}{\pi}$ amplitudin omaavan sinisignaalin
- 3f taajuuden ja $\frac{4 \cdot I}{3\pi}$ amplitudin omaavan sinisignaalin
- 5f taajuuden ja $\frac{4 \cdot I}{5\pi}$ amplitudin omaavan sinisignaalin
- jne.

Kyseistä kuvausta voidaan käyttää kuvassa 17 näkyvän yliaaltoitoisuuden todentamiseksi:



Qualistar+ -sarjan Teho- ja energia-analysaattorit näyttävät samanaikaisesti kaikki mitattavat suureet reaaliajassa suoraan laitteen näytöllä.

Múltiples representaciones de una señal eléctrica trifásica



Los **analizadores** de potencia y energía **Qualistar+** permiten visualizar instantáneamente las características de una red eléctrica trifásica.

Los Qualistar+ muestran las señales de todas las entradas simultáneamente. Las medidas se visualizan en forma de valores, ondas, de representación espectral o incluso en forma de una representación de Fresnel.

**Representación
temporal**

**Representación
espectral**

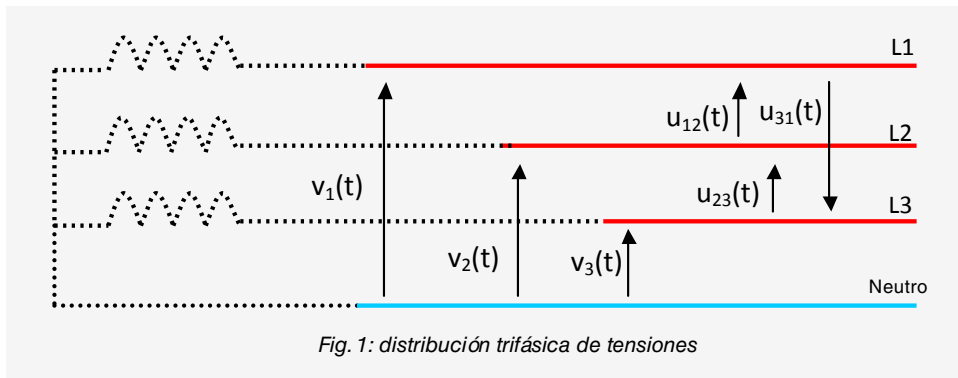
**Representación
vectorial**

Múltiples representaciones de una señal eléctrica trifásica

1. Tensiones trifásicas

El transporte de la energía eléctrica desde su producción (fuente) hasta su distribución (carga) se lleva a cabo a través de tres hilos conductores. Son sobre todo las instalaciones industriales las que son alimentadas por corriente alterna trifásica. Un circuito trifásico recibe tres tensiones sinusoidales de misma frecuencia.

Una distribución de tensiones trifásicas (Fig. 1) consta de 3 conductores de línea y (a veces) de un conductor llamado “de neutro”. Las medidas de tensiones se realizan entonces así:



A. Ecuaciones y propiedades asociadas

El sistema trifásico de tensiones representado por $v_1(t)$, $v_2(t)$ y $v_3(t)$ está definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}v_1(t) &= V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t) \\v_2(t) &= V_2 \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\v_3(t) &= V_3 \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

En teoría:

- las amplitudes de las 3 tensiones son iguales,
- los desfases respectivos son iguales (de 120°)
- las tensiones son perfectamente sinusoidales.

En la práctica, estas propiedades no se comprueban. La importancia de los defectos puede cuantificarse mediante medidas de **tasa de desequilibrio y de distorsión armónica**.

Las tensiones $v_1(t)$, $v_2(t)$ y $v_3(t)$ son llamadas “tensiones sencillas” o “tensiones fase-neutro”. Las tensiones tomadas entre fases son llamadas “tensiones compuestas”. En casos en los que los sistemas trifásicos de tensiones simples son perfectos, las ecuaciones de estas tensiones compuestas se definen entonces de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}u_{12}(t) &= v_1(t) - v_2(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\u_{23}(t) &= v_2(t) - v_3(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\u_{31}(t) &= v_3(t) - v_1(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

La amplitud (así como el valor eficaz) de las tensiones compuestas es $\sqrt{3}$ veces más grande que la de las tensiones simples. La suma de las 3 componentes de un sistema trifásico perfecto de tensiones es igual a 0.

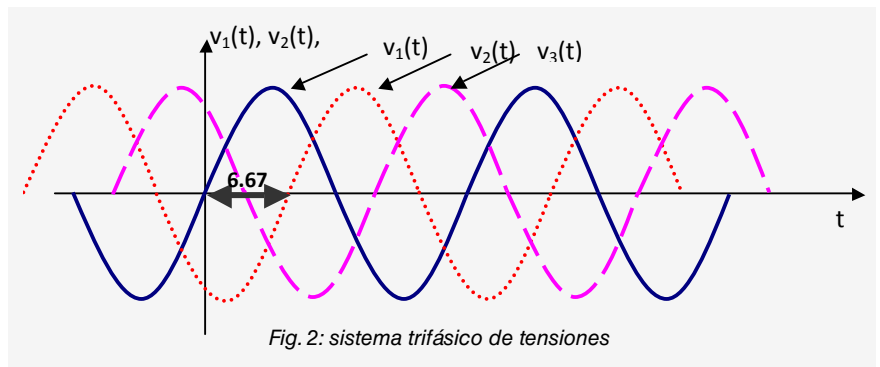
Múltiples representaciones de una señal eléctrica trifásica

B. Representación temporal

El sistema trifásico de tensiones simples (Fig. 2) consta de 3 sinusoides de tensión que se suceden con un desfase de 6,6 ms. Efectivamente,

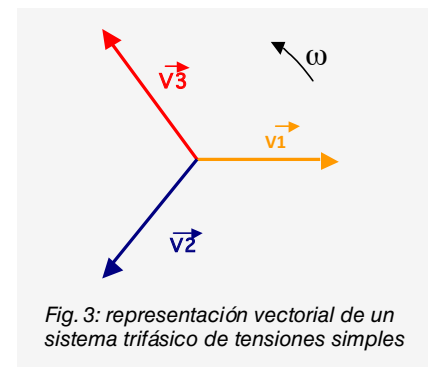
$$\omega \cdot t_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$t_0 = \frac{2\pi}{3 \cdot \omega} = \frac{2\pi}{3 \cdot 314} = 6,67 \text{ ms}$$



C. Representación vectorial

El sistema trifásico de tensiones simples descrito más arriba puede ser representado en un plano vectorial (Fig. 3). La longitud de los vectores corresponde a la amplitud de las sinusoides que forman el sistema. En electrotécnica, son más bien los valores eficaces los que interesan a los usuarios, la **representación vectorial** del sistema se realiza a menudo a partir de los valores eficaces de las funciones sinusoidales.



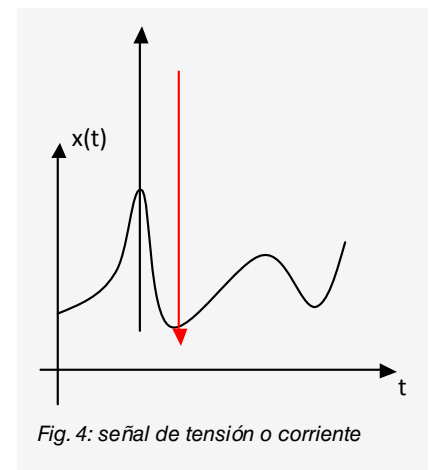
2. Representación temporal de las señales

Las señales eléctricas se representan en un oscilograma. Una señal es la variación de una magnitud eléctrica analógica (tensión o corriente) en función del tiempo. Estas señales varían de forma continua en el tiempo según una ley matemática.

Una señal de tensión o de corriente (Fig. 4) que evoluciona en función del tiempo puede caracterizarse por una relación matemática de tipo:

$$t \rightarrow x(t)$$

o $x(t)$ representa el valor de la señal para cada valor de tiempo t que pasa. Es habitual darle el nombre de **valor instantáneo**.



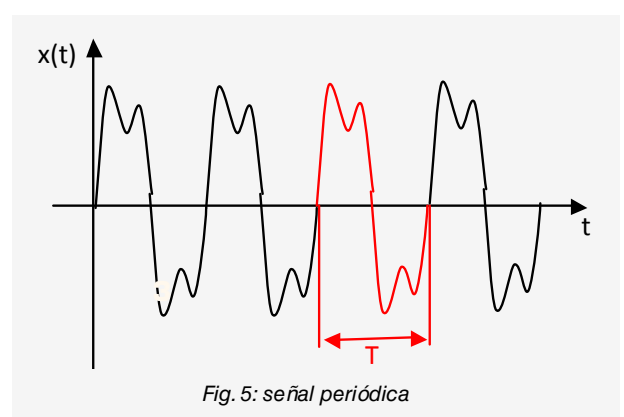
Propiedades especiales

Señal periódica

Una señal $x(t)$ es **periódica** cuando se comprueba la siguiente relación:

$$x(t + T) = x(t)$$

La señal se reproduce idénticamente igual a lo largo del tiempo. El intervalo de tiempo que separa dos instantes donde la señal retoma exactamente las mismas características se llama **periodo T** (Fig. 5).



Múltiples representaciones de una señal eléctrica trifásica

Serie de FOURIER

Cuando la señal es periódica pero no sinusoidal, y a reserva de ciertas propiedades matemáticas (que se comprueban generalmente para las señales que se procesan habitualmente en electrotécnica), se puede obtener, mediante una transformación **en serie de FOURIER**, una representación temporal únicamente compuesta de una señal continua y de señales sinusoidales de frecuencia múltiple de la frecuencia de la señal básica.

Esta propiedad es especialmente interesante por razones de cálculo (cálculo con números complejos) y de representación (**representación espectral**).

Esta transformación se efectúa de la siguiente manera:

Es decir $x(t)$, una señal periódica de periodo T .

La descomposición en serie de FOURIER de $x(t)$ se da mediante la siguiente fórmula:

$$x(t) = \begin{cases} X_0 + \\ A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_n \cos n\omega t + \\ B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_n \sin n\omega t \end{cases}$$

con:

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega \cdot t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega \cdot t) dt$$

X_0 es llamado componente continua de la señal $x(t)$;

A_n y B_n son coeficientes que representan las amplitudes de los armónicos de rango n de la señal $x(t)$.

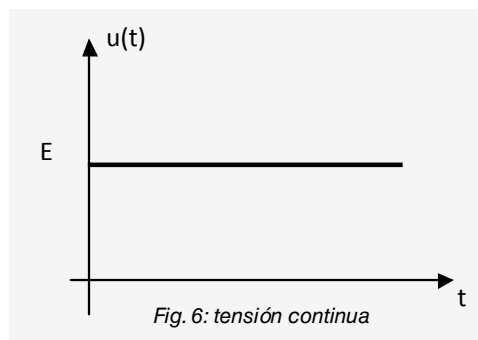
Ejemplos

Tensión continua

$$u(t) = E$$

La tensión $u(t)$ (Fig. 6) no varía con el tiempo.

No es periódica, por lo tanto no se puede descomponer en serie de FOURIER.



Corriente alterna sinusoidal (Fig. 7)

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

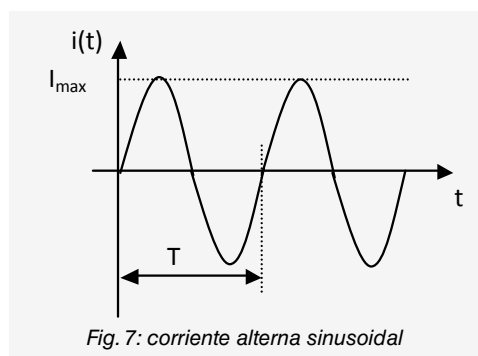
Esta señal es periódica de periodo T , ya que:

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

$$i(t + T) = I_{\max} \sin[\omega(t + T)] = I_{\max} \sin(\omega t + 2\pi) = I_{\max} \sin \omega t$$

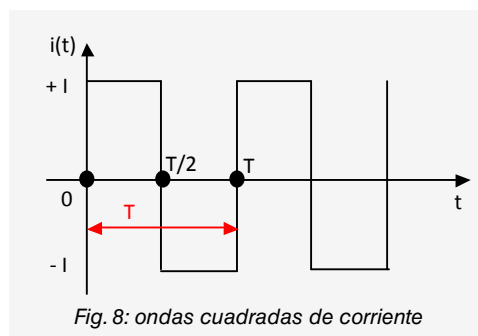
$i(t + T) = i(t)$ esta señal es por lo tanto periódica de periodo T .

El cálculo de la serie de FOURIER de esta señal no es útil ya que $i(t)$ es sinusoidal puro.



Corriente en onda cuadrada (Fig. 8)

$$\begin{cases} i(t) = I \text{ en un semiperiodo} \\ i(t) = -I \text{ en un semiperiodo} \end{cases}$$



Múltiples representaciones de una señal eléctrica trifásica

► Cálculo de la serie de FOURIER

Cálculo de I_0

$$I_0 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} I dt + \int_{T/2}^T (-I) dt \right] = \frac{I}{T} [t_0^{T/2} - t_{T/2}^T]$$

$$I_0 = \frac{I}{T} \left[\frac{T}{2} - 0 - T + \frac{T}{2} \right] = 0$$

El resultado de este cálculo era previsible debido a la simetría con respecto al eje de tiempo de la señal $i(t)$.

Cálculo de los A_n

$$A_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} I \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{T/2}^T I \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right]$$

$$A_n = \frac{I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[\sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_0^{T/2} - \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_{T/2}^T \right]$$

$$A_n = \frac{I}{2\pi \cdot n} [\sin(n \cdot \pi) - \sin(0) - \sin(n \cdot 2\pi) + \sin(n \cdot \pi)]$$

$$A_n = 0$$

Cálculo de los B_n

$$B_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} I \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{T/2}^T I \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[-\cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_0^{T/2} + \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_{T/2}^T \right]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [-\cos(n \cdot \pi) + \cos(0) + \cos(n \cdot 2\pi) - \cos(n \cdot \pi)]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [-(-1)^n + 1 + 1 - (-1)^n]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{\pi \cdot n} [1 - (-1)^n]$$

Para n par, B_n es igual a 0. Para n impar, B_n se escribe: $B_n = \frac{4 \cdot I}{n\pi}$

La descomposición de la señal $i(t)$ en serie de FOURIER se escribe entonces de la siguiente manera:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4 \cdot I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ impar})$$

Observación importante:

Para el cálculo de los A_n y B_n , puede ser adecuado elegir el origen de los tiempos a fin de crear simetrías en la descripción matemática de la señal. Esta operación puede llevar a un reducción significativa de los cálculos.

► Representación temporal

Con la serie calculada anteriormente, se puede reconstruir la señal original con más o menos precisión.

- Con sólo el primer término (Fig. 9):

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t$$

Este primer término también se llama la componente fundamental.

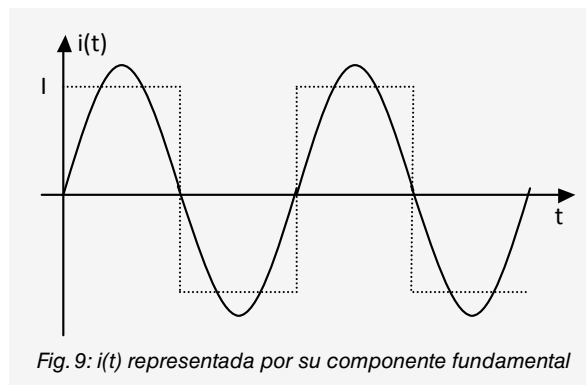
- Con los dos primeros términos:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t$$

- Con los tres primeros términos:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t$$

Cuanto más términos de la serie, más se aproxima de la señal original la señal recompuesta.



Múltiples representaciones de una señal eléctrica trifásica

3. Representación vectorial de las señales

Con la representación de Fresnel, hemos indicado las amplitudes, las fases de las señales. Por lo tanto podemos sacar provecho de las operaciones vectoriales que son más cómodas que las operaciones en las funciones seno y coseno.

La representación vectorial de las relaciones corriente-tensión en régimen sinusoidal es una forma de conservar de la señal únicamente un desfase y una amplitud. Este resultado también se puede obtener con el uso de números complejos.

A. Correspondencia temporal-vectorial

La representación vectorial sólo es posible para las señales sinusoidales.

Se considera la señal sinusoidal $x(t)$ dada por la siguiente relación:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi)$$

X es la amplitud de la señal sinusoidal $x(t)$

ω es el pulso de la señal sinusoidal $x(t)$

φ es la fase al origen de la señal sinusoidal $x(t)$

Esta representación está basada en la correspondencia entre un vector de amplitud X que gira a la velocidad ω alrededor de un punto de origen O de esta misma señal en un eje de tiempos (Fig. 10).

φ es la fase al origen (para $t = 0$).

El ángulo recorrido por el vector \vec{X} relativamente al eje de origen Ox es igual a $(\omega t + \varphi)$.

El periodo T está dado por la siguiente relación:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

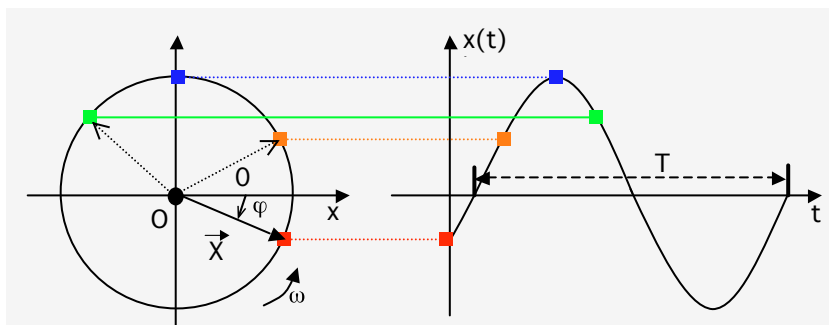


Fig. 10: correspondencia entre el vector X y la señal $x(t)$

B. Representación de FRESNEL

Cuando se intenta analizar señales sinusoidales (corriente y tensión) relativas a un mismo circuito, se suele utilizar una representación vectorial llamada representación de FRESNEL. Las magnitudes sinusoidales son de idéntico pulso, sólo las amplitudes y las fases iniciales son distintas. Una representación de los vectores para un momento dado basta por lo tanto para tratar los problemas (Fig. 11).

Se suele tomar el origen de los tiempos ($t = 0$).

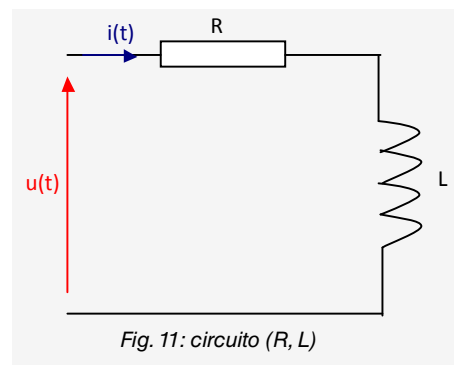


Fig. 11: circuito (R, L)

Ejemplo 1: circuito inductivo

$u(t) = U_{\max} \sin \omega t$ en régimen permanente, la corriente $i(t)$ es igual a:

$$i(t) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{con} \quad \text{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

Con una representación de FRESNEL (FIG. 12), la tensión y la corriente se representan mediante los vectores \vec{U} e \vec{I} :

Cabe destacar que el ángulo φ siempre está (por convención) orientado desde la corriente hacia la tensión.

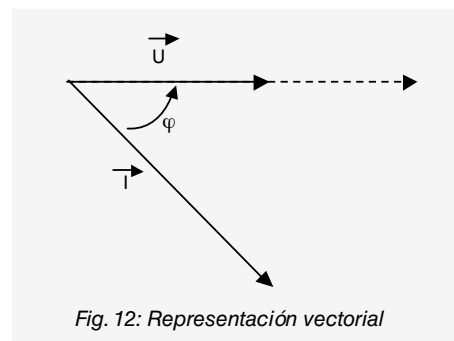


Fig. 12: Representación vectorial

Múltiples representaciones de una señal eléctrica trifásica

Ejemplo 2: sistema trifásico de tensiones

Es decir el sistema trifásico de tensiones representado por las siguientes ecuaciones:

$$v_1(t) = V_{\max} \sin \omega.t$$

$$v_2(t) = V_{\max} \sin\left(\omega.t - \frac{2.\pi}{3}\right)$$

$$v_3(t) = V_{\max} \sin\left(\omega.t - \frac{4.\pi}{3}\right)$$

En la Fig. 3, la representación vectorial (de FRESNEL) de este mismo sistema trifásico.

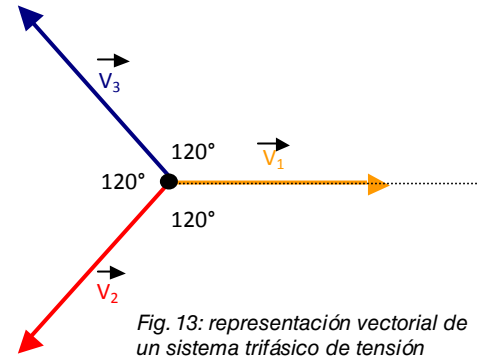


Fig. 13: representación vectorial de un sistema trifásico de tensión

4. Representación espectral de las señales

Una señal no sinusoidal es más compleja. Puede contener una multitud de frecuencias. Su espectro nos informa por lo tanto sobre las distintas componentes de frecuencia que contiene. El espectro de una señal es la representación en función de la frecuencia de las amplitudes de las distintas componentes presentes en la señal.

Cuando una señal es periódica pero no sinusoidal, y a reserva de ciertas propiedades matemáticas (que se comprueban generalmente para las señales que se procesan habitualmente en electrotécnica), se puede obtener, mediante una transformación en serie de FOURIER, una representación temporal únicamente compuesta de una señal continua y de señales sinusoidales de frecuencias múltiples de la frecuencia de la señal básica.

Esta propiedad es especialmente interesante para representar la señal al resaltar la frecuencia y la amplitud de las distintas componentes sinusoidales dadas por el cálculo de la descomposición en serie de FOURIER.

En el caso de una señal sinusoidal pura (Fig. 14) descrita por la siguiente expresión:

$$x(t) = X \sin \omega.t$$

vemos aparecer una amplitud X para una señal sinusoidal de pulso ω (o de frecuencia f).

Estas dos informaciones, importantísimas para analizar una red, pueden incluirse en un gráfico que lleva en las ordenadas la amplitud de la sinusoide y su frecuencia en el eje de abscisas. Esta representación gráfica referente a la señal $x(t)$ es la representación espectral de la señal $x(t)$ (Fig. 15).

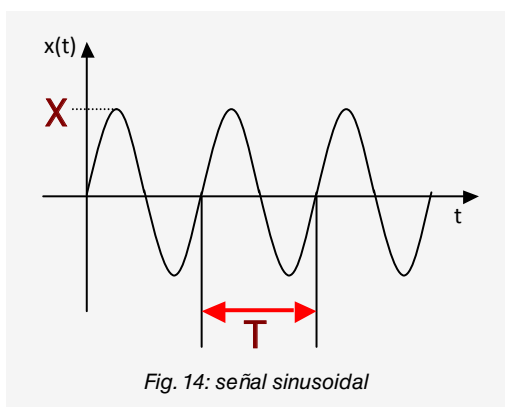


Fig. 14: señal sinusoidal

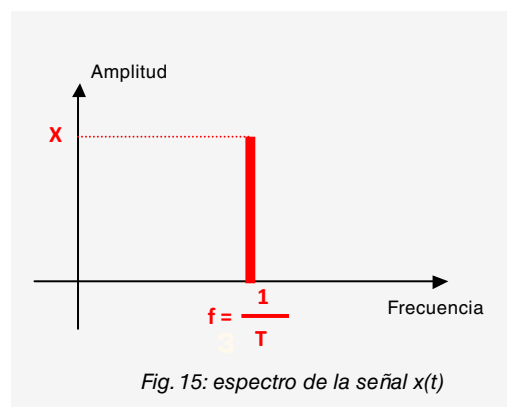


Fig. 15: espectro de la señal x(t)

Múltiples representaciones de una señal eléctrica trifásica

Ejemplo: señal cuadrada

Una corriente $i(t)$ está descrita por la siguiente relación matemática:

$$\begin{cases} i(t) = I \text{ en un semiperiodo} \\ i(t) = -I \text{ en un semiperiodo} \end{cases}$$

La figura 16 da una representación temporal de $i(t)$.

El cálculo de la serie de FOURIER de esta señal $i(t)$ da la siguiente expresión:

$$i(t) = \frac{4.I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4.I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4.I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4.I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ impar})$$

Esta señal no tiene componente continua, consta de:

- una señal sinusoidal de frecuencia f (la de la señal básica) de amplitud $\frac{4.I}{\pi}$
- una señal sinusoidal de frecuencia $3f$ de amplitud $\frac{4.I}{3\pi}$
- una señal sinusoidal de frecuencia $5f$ de amplitud $\frac{4.I}{5\pi}$
- ...

Esta descripción permite definir la siguiente representación espectral (o armónica) (Fig. 17):

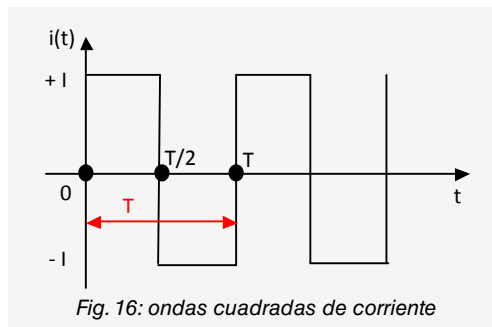


Fig. 16: ondas cuadradas de corriente

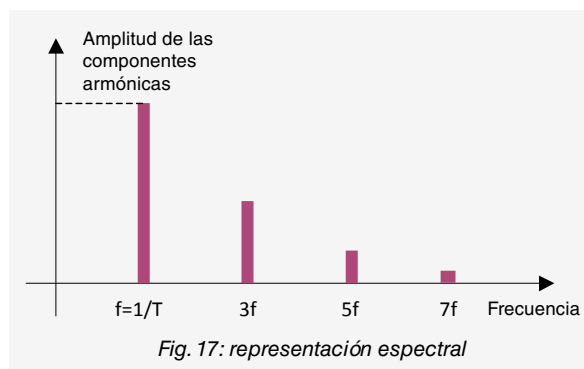
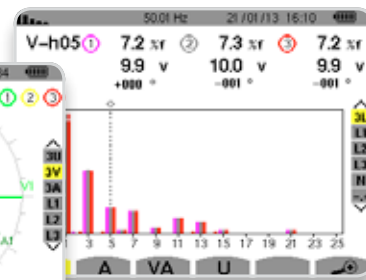
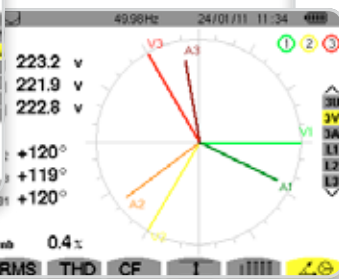
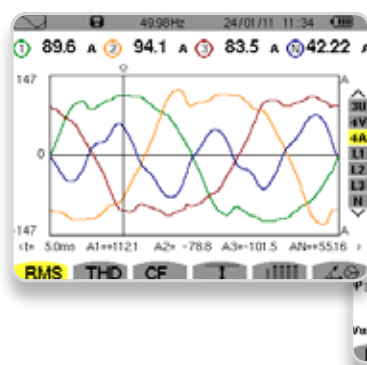


Fig. 17: representación espectral



Los analizadores de potencia y energía de **la gama Qualistar+** permiten la visualización de todas estas representaciones.

Rappresentazione del segnale elettrico **trifase**



Gli **analizzatori** di potenza e di energia **Qualistar+** consentono di visualizzare istantaneamente le caratteristiche di una rete elettrica trifase.

I Qualistar+ visualizzano simultaneamente i segnali di tutti gli ingressi. Le misure sono presentate come valori, forme d'onda, rappresentazione spettrale oppure come rappresentazione vettoriale (detta anche di Fresnel).

**Rappresentazione
temporale**

**Rappresentazione
spettrale**

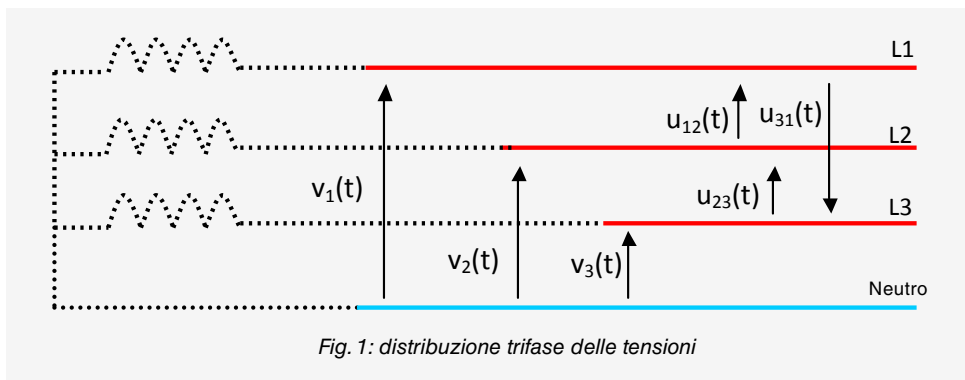
**Rappresentazione
vettoriale**

Rappresentazioni del segnale elettrico trifase

1. Tensioni trifase

Il trasporto dell'energia elettrica dal punto di produzione (sorgente) a quello di distribuzione (carico) avviene mediante tre conduttori. La corrente alternata trifase è utilizzata soprattutto per alimentare gli impianti industriali. Un circuito trifase riceve tre tensioni sinusoidali della medesima frequenza.

La distribuzione di tensioni trifase (fig. 1) è composta di 3 conduttori di linea e (a volte) di un conduttore detto "di neutro". Le misurazioni delle tensioni si effettuano quindi come segue:



A. Equazioni e proprietà associate

Il sistema trifase di tensioni rappresentato da $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $v_3(t)$ è definito dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned}v_1(t) &= V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t) \\v_2(t) &= V_2 \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\v_3(t) &= V_3 \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

In teoria:

- l'ampiezza delle 3 tensioni è uguale,
- i rispettivi sfasamenti sono uguali (120°)
- le tensioni sono perfettamente sinusoidali.

Nel caso pratico però la teoria non viene mai riscontrata. L'entità degli scostamenti può essere quantificata attraverso misure del **coefficiente di squilibrio e del coefficiente di distorsione armonica**.

Le tensioni $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $v_3(t)$ sono dette "tensioni di fase" o "tensioni fase-neutro". Le tensioni rilevate tra fasi si dicono "tensioni concatenate". Nel caso in cui i sistemi trifase di tensioni concatenate siano perfetti, le equazioni di queste tensioni composte sono definite nel modo seguente:

$$\begin{aligned}u_{12}(t) &= v_1(t) - v_2(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\u_{23}(t) &= v_2(t) - v_3(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\u_{31}(t) &= v_3(t) - v_1(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

L'ampiezza (e il valore efficace) delle tensioni composte è $\sqrt{3}$ volte maggiore di quella delle tensioni semplici.

La somma delle 3 componenti di un sistema trifase simmetrico di tensioni è pari a 0.

Rappresentazioni del segnale elettrico trifase

B. Rappresentazione temporale

Un sistema trifase di tensioni di fase isofrequenziali a 50 Hz (fig. 2) si compone di 3 sinusoidi di tensione che si succedono con uno sfasamento di 6,67 ms. Infatti,

$$\omega \cdot t_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$t_0 = \frac{2\pi}{3 \cdot \omega} = \frac{2\pi}{3 \cdot 314} = 6,67 \text{ ms}$$

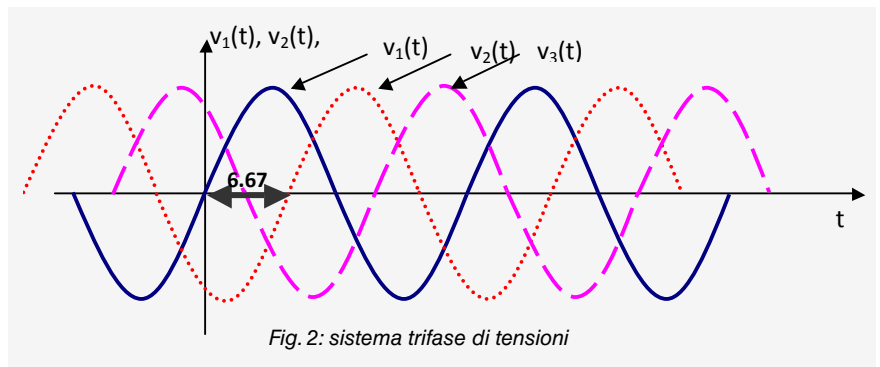


Fig. 2: sistema trifase di tensioni

C. Rappresentazione vettoriale

Il sistema trifase di tensioni di fase descritto in precedenza può essere rappresentato su un piano vettoriale (fig. 3). La lunghezza dei vettori corrisponde all'ampiezza delle sinusoidi che compongono il sistema. In elettrotecnica, ciò che più interessa l'utente sono i valori efficaci, e la **rappresentazione vettoriale** del sistema molto spesso è realizzata a partire dai valori efficaci delle funzioni sinusoidali.

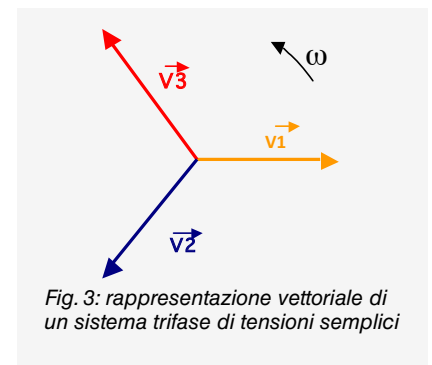


Fig. 3: rappresentazione vettoriale di un sistema trifase di tensioni semplici

2. Rappresentazione temporale dei segnali

Per la rappresentazione dei segnali elettrici si utilizza un oscillogramma.

Un segnale è la variazione di una grandezza elettrica analogica (tensione o corrente) in funzione del tempo. Questi segnali variano in modo continuo nel tempo secondo una legge matematica.

Un segnale di tensione o di corrente (fig. 4) che varia in funzione del tempo può essere caratterizzato da una relazione matematica del tipo:

$$t \rightarrow x(t)$$

dove $x(t)$ rappresenta il valore del segnale per ogni valore del tempo t che passa. Per consuetudine questo fattore è chiamato **valore istantaneo**.

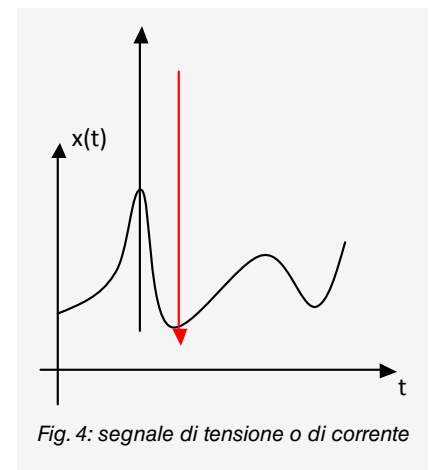


Fig. 4: segnale di tensione o di corrente

Proprietà particolari

Segnale periodico

Un segnale $x(t)$ è **periodico** quando si verifica la relazione seguente:

$$x(t + T) = x(t)$$

Il segnale si riproduce identico a se stesso nel corso del tempo. L'intervallo di tempo che separa due istanti in cui il segnale riprende esattamente le stesse caratteristiche si chiama **periodo T** (fig. 5).

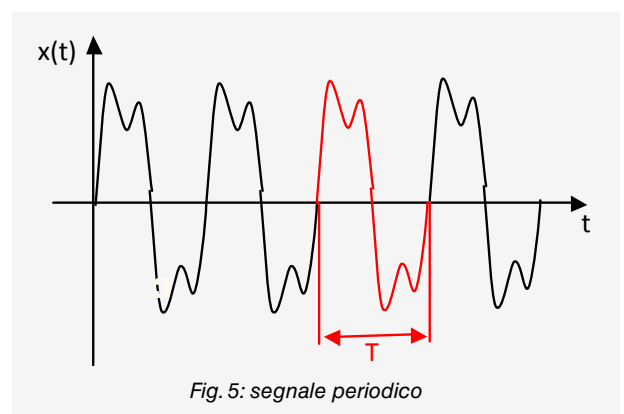


Fig. 5: segnale periodico

Rappresentazioni del segnale elettrico trifase

Serie di FOURIER

Quando il segnale è periodico ma non sinusoidale e se si verificano alcune condizioni (in genere verificate per i segnali trattati abitualmente in elettrotecnica), è possibile ottenere, con una trasformazione **in serie di FOURIER**, una rappresentazione temporale composta esclusivamente dalla somma di un segnale continuo e di segnali sinusoidali la cui frequenza è un multiplo della frequenza del segnale di base.

Questa proprietà è particolarmente interessante per ragioni di calcolo (calcolo con numeri complessi) e di rappresentazione (**rappresentazione spettrale**).

Tale trasformazione si esegue nel modo seguente:

Si dia $x(t)$, un segnale periodico con periodo T .

La scomposizione in serie di FOURIER di $x(t)$ è data dalla formula seguente:

$$x(t) = \begin{cases} X_0 + \\ A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_n \cos n\omega t + \\ B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_n \sin n\omega t \end{cases}$$

con:

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega \cdot t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega \cdot t) dt$$

X_0 è chiamato componente continua del segnale $x(t)$;

A_n e B_n sono coefficienti che rappresentano l'ampiezza delle armoniche di grado n del segnale $x(t)$.

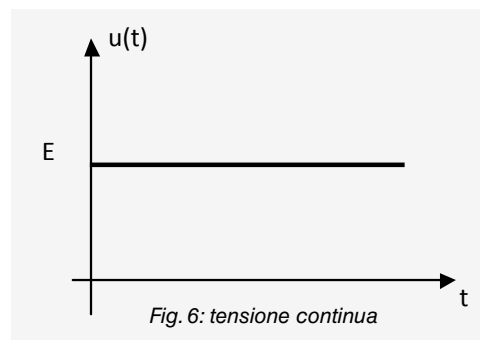
Esempi

Tensione continua

$$u(t) = E$$

La tensione $u(t)$ (fig. 6) non varia nel corso del tempo.

Non è periodica, quindi non è scomponibile secondo la serie di FOURIER.



Corrente alternata sinusoidale (fig. 7)

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

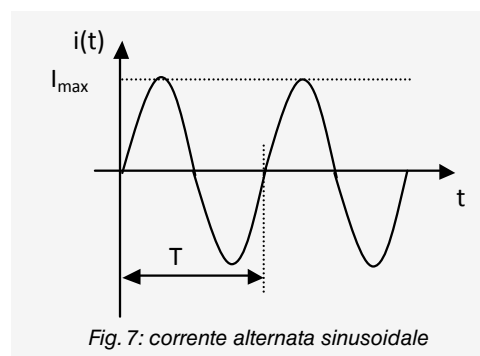
Questo segnale è periodico con periodo T perché:

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

$$i(t+T) = I_{\max} \sin[\omega(t+T)] = I_{\max} \sin(\omega t + 2\pi) = I_{\max} \sin \omega t$$

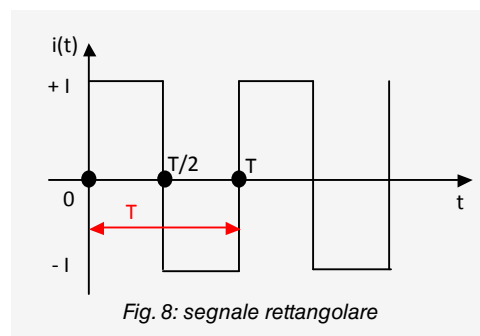
$i(t+T) = i(t)$ questo segnale è quindi periodico con periodo T .

Il calcolo della serie di FOURIER di questo segnale non è utile poiché $i(t)$ è sinusoidale puro.



Corrente a segnali rettangolari (fig. 8)

$$\begin{cases} i(t) = I \text{ su un emiperiodo} \\ i(t) = -I \text{ su un emiperiodo} \end{cases}$$



Rappresentazioni del segnale elettrico trifase

Calcolo della serie di FOURIER

Calcolo di I_0

$$I_0 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} I dt + \int_{T/2}^T (-I) dt \right] = \frac{I}{T} [t_0^{T/2} - t_{T/2}^T]$$

$$I_0 = \frac{I}{T} \left[\frac{T}{2} - 0 - T + \frac{T}{2} \right] = 0$$

Il risultato di questo calcolo era prevedibile, tenuto conto della simmetria in relazione all'asse del tempo del segnale $i(t)$.

Calcolo degli A_n

$$A_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} I \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{T/2}^T I \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right]$$

$$A_n = \frac{I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[\sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_0^{T/2} - \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_{T/2}^T \right]$$

$$A_n = \frac{I}{2\pi \cdot n} [\sin(n \cdot \pi) - \sin(0) - \sin(n \cdot 2\pi) + \sin(n \cdot \pi)]$$

$$A_n = 0$$

Calcolo dei B_n

$$B_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} I \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{T/2}^T I \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[-\cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_0^{T/2} + \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)_{T/2}^T \right]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [-\cos(n \cdot \pi) + \cos(0) + \cos(n \cdot 2\pi) - \cos(n \cdot \pi)]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [-(-1)^n + 1 + 1 - (-1)^n]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{\pi \cdot n} [1 - (-1)^n]$$

Per n pari, B_n è uguale a 0. Per n dispari, B_n si scrive: $B_n = \frac{4 \cdot I}{n\pi}$

La scomposizione del segnale $i(t)$ in serie di FOURIER si scrive quindi:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4 \cdot I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ dispari})$$

Nota importante::

Per eseguire il calcolo degli A_n e dei B_n , può essere utile scegliere l'origine dei tempi in modo da creare una simmetria nella descrizione matematica del segnale. Questa operazione può consentire una notevole semplificazione dei calcoli.

Rappresentazione temporale

Con la serie calcolata in precedenza, è possibile ricostruire il segnale originale con maggiore o minore precisione.

- Solo con il primo termine (fig. 9):

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t$$

Questo primo termine è anche detto "fondamentale".

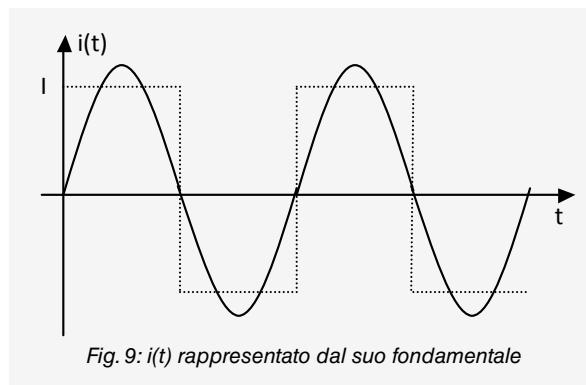
- Con i primi due termini:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t$$

- Con i primi tre termini:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t$$

Più termini della serie si aggiungono, più il segnale ricomposto si avvicinerà al segnale originale.



Rappresentazioni del segnale elettrico trifase

3. Rappresentazione vettoriale dei segnali

Con la rappresentazione di Fresnel utilizzato è possibile sfruttare le operazioni vettoriali, più agevoli delle operazioni sulle funzioni seno e coseno. La rappresentazione vettoriale di corrente-tensione in regime sinusoidale è un modo per conservare solo uno sfasamento e un'ampiezza del segnale. È anche possibile ottenere questo risultato attraverso l'uso dei numeri complessi.

A. Corrispondenza temporale-vettoriale

La rappresentazione vettoriale è possibile esclusivamente per i segnali sinusoidali. Si consideri il segnale sinusoidale $x(t)$ dato dalla relazione seguente:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi)$$

X è l'ampiezza del segnale sinusoidale $x(t)$

ω è la pulsazione del segnale sinusoidale $x(t)$

φ è la fase rispetto all'origine del segnale sinusoidale $x(t)$

Questa rappresentazione si basa sulla corrispondenza, tra un vettore di ampiezza X in rotazione alla velocità ω intorno a un punto di origine O , di questo stesso segnale su un asse dei tempi (fig. 10).

φ è la fase all'origine (per $t = 0$).

L'angolo percorso dal vettore \vec{X} relativamente all'asse di origine Ox è uguale a $(\omega t + \varphi)$.

Il periodo T è dato dalla relazione seguente:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

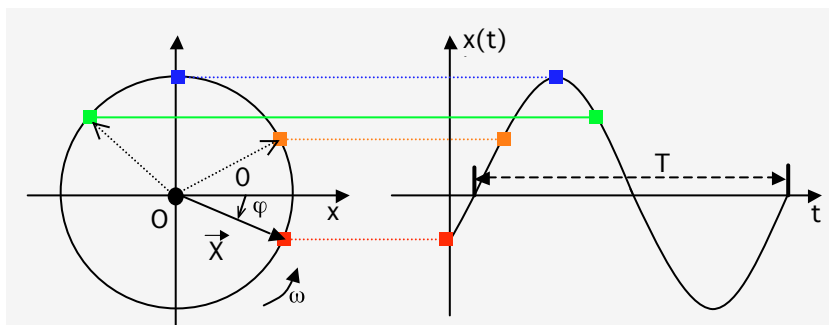


Fig. 10: corrispondenza tra il vettore X e il segnale $x(t)$

B. Rappresentazione di FRESNEL

Quando ci si accinge a studiare dei segnali sinusoidali (corrente e tensione) relativi a uno stesso circuito, è consuetudine utilizzare una rappresentazione vettoriale detta rappresentazione di FRESNEL. Le grandezze sinusoidali presentano la stessa pulsazione, solo le ampiezze e le fasi iniziali sono diverse. Una rappresentazione dei vettori per un istante dato è quindi sufficiente per trattare i problemi (fig. 11).

Si prende, in generale, come riferimento l'origine dei tempi ($t = 0$).

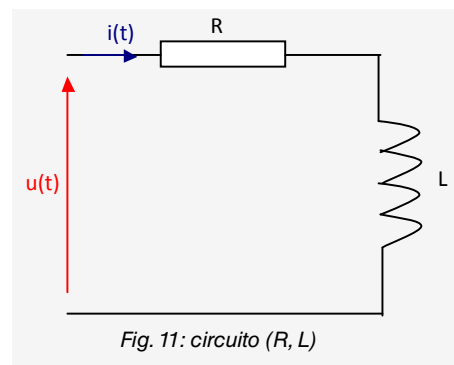


Fig. 11: circuito (R, L)

Esempio 1: circuito con reattanza

$u(t) = U_{\max} \sin \omega t$ in regime permanente la corrente $i(t)$ è uguale a:

$$i(t) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{con} \quad \text{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

In una rappresentazione di FRESNEL (fig. 12), la tensione e la corrente sono rappresentate dai vettori \vec{U} e \vec{I} :

Si noti che l'angolo φ è sempre, per convenzione, orientato dalla corrente verso la tensione.

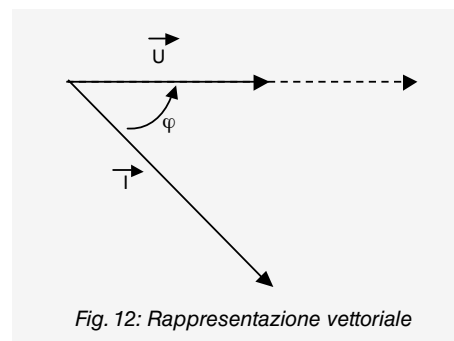


Fig. 12: Rappresentazione vettoriale

Rappresentazioni del segnale elettrico trifase

Esempio 2: sistema trifase di tensioni

Dato il sistema trifase di tensioni rappresentato dalle equazioni seguenti:

$$v_1(t) = V_{\max} \sin \omega.t$$

$$v_2(t) = V_{\max} \sin\left(\omega.t - \frac{2.\pi}{3}\right)$$

$$v_3(t) = V_{\max} \sin\left(\omega.t - \frac{4.\pi}{3}\right)$$

In fig. 3, la rappresentazione vettoriale (di FRESNEL) di questo stesso sistema trifase.

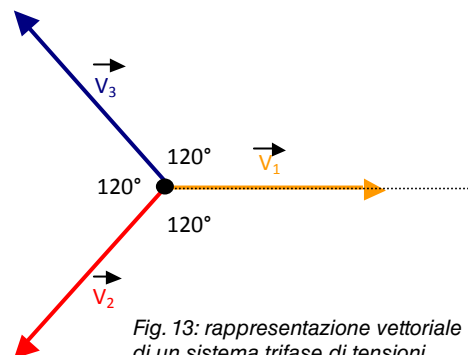


Fig. 13: rappresentazione vettoriale di un sistema trifase di tensioni

4. Rappresentazione spettrale dei segnali

Un segnale periodico non sinusoidale è più complesso; può contenere una moltitudine di frequenze. Il suo spettro fornisce quindi informazioni sulle diverse componenti frequenziali che contiene. Lo spettro di un segnale è la rappresentazione in funzione delle frequenze delle diverse componenti presenti nel segnale.

Quando un segnale $x(t)$ è periodico ma non sinusoidale e caratterizzato da determinate proprietà matematiche (in genere verificate per i segnali trattati abitualmente in elettrotecnica), è possibile ottenere, attraverso una trasformazione in serie di FOURIER, una rappresentazione temporale composta esclusivamente da un segnale continuo e da segnali sinusoidali le cui frequenze sono multipli della frequenza del segnale di base.

Questa proprietà è molto interessante per rappresentare il segnale facendo emergere la frequenza e l'ampiezza delle diverse componenti sinusoidali date dal calcolo della scomposizione in serie di FOURIER.

Nel caso di un segnale sinusoidale puro (fig. 14) descritto dall'espressione seguente:

$$x(t) = X \sin \omega.t$$

vediamo apparire un'ampiezza X per un segnale sinusoidale di pulsazione ω (o di frequenza f).

Queste due informazioni, molto importanti sul piano dell'analisi della rete, possono essere riportate su un grafico nel quale figurano sulle ordinate l'ampiezza della sinusoide, mentre la frequenza è indicata sull'asse delle ascisse. Questa è la rappresentazione spettrale del segnale $x(t)$ (fig. 15).

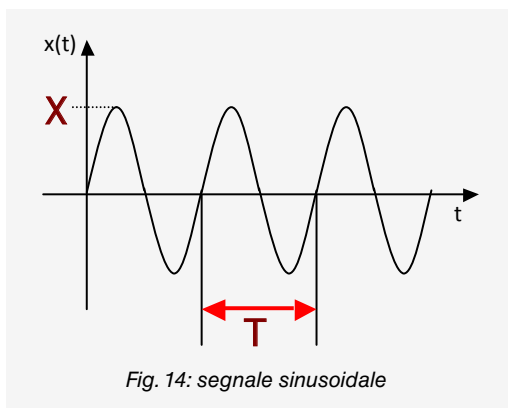


Fig. 14: segnale sinusoidale

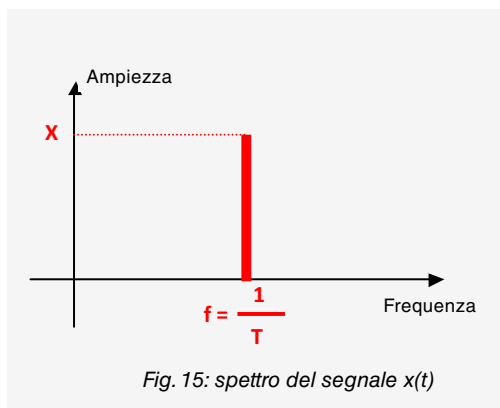


Fig. 15: spettro del segnale x(t)

Rappresentazioni del segnale elettrico trifase

Esempio: segnale rettangolare

Una corrente $i(t)$ è descritta dalla funzione matematica seguente:

$$\begin{cases} i(t) = I \text{ su un emiperiodo} \\ i(t) = -I \text{ su un emiperiodo} \end{cases}$$

La figura 16 fornisce una rappresentazione temporale di $i(t)$.

Il calcolo della serie di FOURIER di questo segnale $i(t)$ fornisce la seguente:

$$i(t) = \frac{4.I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4.I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4.I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4.I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ dispari})$$

Questo segnale non presenta componenti continue, ma è composto da:

- un segnale sinusoidale di frequenza f (quella del segnale di base) di ampiezza $\frac{4.I}{\pi}$
- un segnale sinusoidale di frequenza $3f$ di ampiezza $\frac{4.I}{3\pi}$
- un segnale sinusoidale di frequenza $5f$ di ampiezza $\frac{4.I}{5\pi}$
- ...

Questa descrizione consente di stabilire la rappresentazione spettrale (o armonica) seguente (fig. 17):

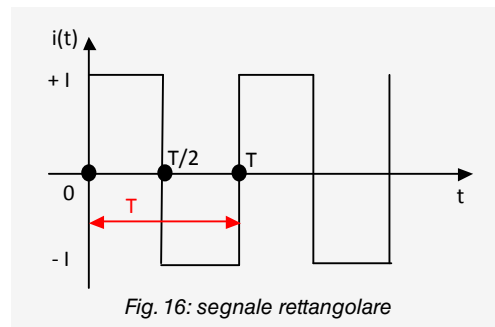


Fig. 16: segnale rettangolare

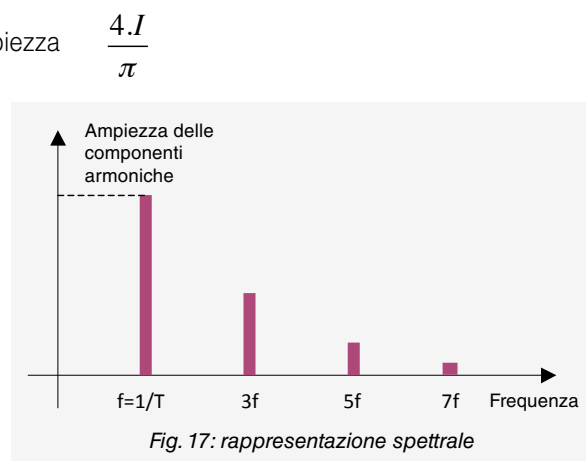
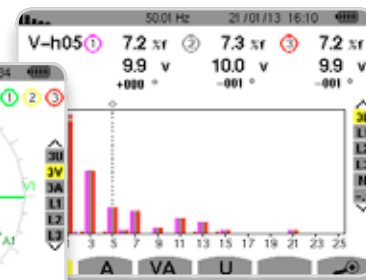
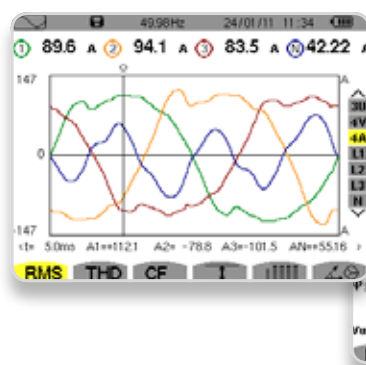


Fig. 17: rappresentazione spettrale



Gli analizzatori di potenza e della qualità dell'energia della **linea Qualistar+** consentono la visualizzazione di tutte le rappresentazioni descritte.